ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

2012

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
κατεύθυνσης
Β ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΕΛΕΥΤΑΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

- Συνοπτικη θεωρια με αποδειξεις
- Λυμενα θεματα για εξετάσεις
- Θέματα…από εξετάσεις

Βαγγέλης Α Νικολακάκης
Μαθηματικός

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Το παρόν e-BOOK φτιάχτηκε για να προσφέρει λίγη βοήθεια στους μαθητές της Β Λυκείου , για τις εξετάσεις Μαίου – Ιουνίου 2012 ,αλλά και για τους αξιότιμους κ.κ. συναδέλφους που θέλουν να οργανώσουν τις επαναλήψεις τους….

Επειδή η θεωρία των μαθηματικών κατεύθυνσης της Β Λυκείου έχει μεγάλη έκταση και δυσκολεύει τους μαθητές, τον παρόν έχει εμπλουτιστεί ,σε σχέση με τα άλλα τετράδια επανάληψης ,με τυπολόγια ,επισημάνσεις θεωρίας κλπ.

Οι ενότητες αφορούν την διδακτέα και εξεταστέα ύλη 2011-2012

Τονίζω όμως από τη θέση αυτή ,ότι το παρόν δεν αντικαθιστά το σχολικό βιβλίο. Απλά προσφέρει την δυνατότητα για μια ΄΄γρήγορη΄΄ επανάληψη…….

- Στην ενότητα 1 δίνεται η δυνατότητα για μια καλή επανάληψη θεωρίας :
  - Μελετώντας τις επισημάνσεις θεωρίας και τις αποδείξεις και ….
  - στη συνέχεια απαντώντας σε όλες τις ερωτήσεις
- Στην ενότητα 2 δίνονται λυμένες οι σημαντικότερες ασκήσεις
- Στην ενότητα 3 δίνονται θέματα από εξετάσεις

ΠΗΓΕΣ

- ΘΕΜΑΤΟΓΡΑΦΙΑ-ΑΡΧΕΙΟ (Βαγγέλη Α Νικολακάκη)
- Τσόπελας Γιάννης (Ερωτήσεις Θεωρίας)
- Καρδαμίτσης Σπύρος (Αποδείξεις Θεωρίας)
- Θέματα εξετάσεων (Από το αρχείο του κ.Βασιλά Νικολάου)
- Αναστάσιος Μπάρλας (Μαθηματικά Κατεύθυνσης Β Λυκείου)
- Βασίλης Παπαδάκης (Μαθηματικά Κατεύθυνσης Β Λυκείου)
- MATHEMATICA (επαναληπτικά θέματα)
- Ungar - Analytic Hyperbolic Geometry (2005)
- Seidenberg - Lectures in Projective Geometry (1962)

Υ.Γ.

Κάθε κριτική , σχόλιο ,παρατήρηση ή διόρθωση είναι ευπρόσδεκτη.

Με εκτίμηση

Βαγγέλης Α Νικολακάκης vaggelisnikolakakis@hotmail.com

Τηλ 6937020032

1 ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ -ΕΠΙΣΥΜΑΝΣΕΙΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ-1

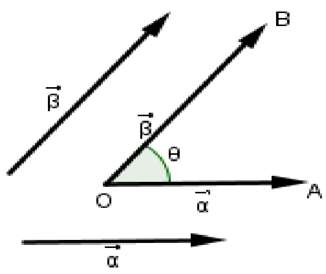
ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ - ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

1. Ορισμοί :

- **<u>Ομόρροπα :</u>** έχουν ίδια διέυθυνση και ίδια φορά. (ίδια κατέυθυνση)
- **<u>Αντίρροπα :</u>** έχουν ίδια διέυθυνση και αντίθετη φορά. (αντίθετη κατεύθυνση)
- **<u>Ίσα :</u>**έχουν ίδια κατέυθυνση και ίσα μέτρα.
- **<u>Αντίθετα :</u>** έχουν αντίθετη κατέυθυνση και ίσα μέτρα.
- **<u>Μηδενικό:</u>** το διάνυσμα όπου η αρχή και το πέρας συμπίπτουν.(το μέτρο του είναι μηδέν.).

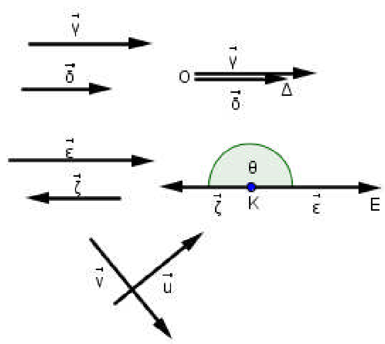
- **Γωνία δύο διανυσμάτων**

$\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ **:** λέγεται η θετική και κυρτή γωνία που σχηματίζουν όταν τα καταστήσουμε να έχουν κοινή αρχή
Συμβολίζουμε με $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$ ή $(\widehat{\vec{\beta},\vec{\alpha}})$ ή γενικά θ με $0^0 \le \theta \le 180^0$
π.χ. στο σχήμα με κοινή αρχή Ο παίρνουμε $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$



Ειδικές περιπτώσεις:

↦ Τα ομόρροπα διανύσματα σχηματίζουν γωνία 0^0
π.χ. Αν $\vec{\gamma} \uparrow\uparrow \vec{\delta}$ τότε $\theta=0^0$
↦ Τα αντίροπα διανύσματα σχηματίζουν γωνία 180^0
π.χ. Αν $\vec{\varepsilon} \uparrow\downarrow \vec{\zeta}$ τότε $\theta=180^0$
↦ Αν $\theta=90^0$ τα διανύσματα λέγονται κάθετα ή ορθογώνια
π.χ. Αν $\theta=90^0$ τότε $\vec{u} \perp \vec{v}$
↦ Θεωρούμε ότι το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}$ σχηματίζει οποιαδήποτε γωνία θ $(0^0 \le \theta \le 180^0)$ με κάθε άλλο διάνυσμα



2. Πράξεις διανυσμάτων :

- **<u>πρόσθεση :</u>** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma}$
  $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\beta} + \vec{\alpha}$
  $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma} = \vec{\alpha} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma})$
  $\vec{\alpha} + \vec{0} = \vec{\alpha}$
  $\vec{\alpha} + (-\vec{\alpha}) = \vec{0}$
- **<u>αφαίρεση:</u>** $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{\Gamma B}$
  $\vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{\alpha} + (-\vec{\beta})$

- **<u>πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα:</u>**

  $\lambda(\vec{\alpha}+\vec{\beta})=\lambda\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$ και $\lambda(\vec{\alpha}-\vec{\beta})=\lambda\vec{\alpha}-\lambda\vec{\beta}$

  $(\lambda+\mu)\cdot\vec{\alpha}=\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\alpha}$ και $(\lambda-\mu)\vec{\alpha}=\lambda\vec{\alpha}-\mu\vec{\alpha}$

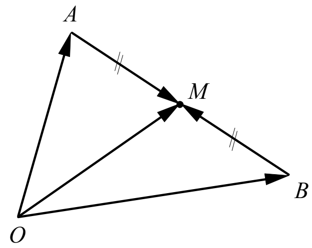
  $\lambda\vec{\alpha}=\vec{0}\Leftrightarrow\lambda=0$ ή $\vec{\alpha}=\vec{0}$

  $\lambda(\mu\vec{\alpha})=(\lambda\mu)\vec{\alpha}=\mu(\lambda\vec{\alpha})$ και $(-\lambda\vec{\alpha})=\lambda(-\vec{\alpha})=-(\lambda\vec{\alpha})$

  Αν $\lambda\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}$ και $\lambda\neq 0$ τότε $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$

  Αν $\lambda\vec{\alpha}=\mu\vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$ τότε λ=μ

3. Διανυσματική ακτίνα μέσου τμήματος:



$$\boxed{\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}} \Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OM}}$$

4. Συντεταγμένες διανύσματος:

Ζητούμε τις συντεταγμένες (x,y) σημείου
Εκφράζουμε τη σχέση που δίνεται, ή κάποια άλλη γνωστή με συντεταγμένες και με χρήση ιδιοτήτων και πράξεων (συνήθως από σύστημα) βρίσκουμε τα x, y

- **<u>Πράξεις:</u>**

  $(x_1, y_1)+(x_2, y_2)=(x_1+x_2, y_1+y_2)$

  $\lambda(x, y)= (\lambda x , \lambda y)$

- **<u>Συντεταγμένες μέσου τμήματος:</u>**

  $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$ και $y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$

- **<u>Συντεταγμένες διανύσματος</u>** (όταν τα άκρα είναι γνωστά)

  Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ τότε $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1)$

Παρατηρήσεις:

↦ Αν $\vec{\alpha}$ **// y΄y τότε** $\vec{\alpha}$ **= (0 , y)** (το διάνυσμα έχει τετμημένη 0)

↦ Αν $\vec{\alpha}$ **// χ΄χ τότε** $\vec{\alpha}$ **= (x , 0)** (το διάνυσμα έχει τεταγμένη 0)

- **<u>Μέτρο διανύσματος:</u>**

  $|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$

  $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

  $|\vec{\alpha}|^2=\vec{\alpha}^2$

5. Συντελεστής διεύθυνσης διανύσματος:

- $\lambda=\dfrac{y}{x}=\varepsilon\varphi\phi$
- Αν $\vec{\alpha}\,//\,x'x$ τότε λ=0
- Αν $\vec{\alpha}\,//\,y'y$ τότε ο λ δεν ορίζεται

ΠΡΟΣΟΧΗ
Αν οι συντελεστές διεύθυνσης είναι ίσοι τότε τα διανύσματα είναι παράλληλα

6. Παράλληλα διανύσματα:

- $\vec{\alpha}\,//\,\vec{\beta}\Leftrightarrow \det(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}=0$

- $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$
- $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}$
- $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \pm |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$

7. Συνευθειακά σημεία:

- Α ,Β, Γ συνευθειακά αν $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{B\Gamma}$ ή $\overrightarrow{A\Gamma} // \overrightarrow{\Gamma B}$ ή $\overrightarrow{B\Gamma} // \overrightarrow{\Gamma A}$ με οποιονδήποτε από τους παραπάνω τρόπους.

8. Εσωτερικό γινόμενο:

- $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$
- $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta} \cdot \vec{\alpha}$
- $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$
- $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$ και $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$
- $\vec{\alpha}^2 = |\vec{\alpha}|^2$ και $|\vec{\alpha} \pm \vec{\beta}|^2 = (\vec{\alpha} \pm \vec{\beta})^2$
- $(\vec{\alpha} \pm \vec{\beta}) = \vec{\alpha}^2 \pm 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2$ και $\vec{\alpha}^2 - \vec{\beta}^2 = (\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} + \vec{\beta})$
- $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1 \cdot x_2 + y_1 y_2$

9. Γωνία διανυσμάτων:

- $\sigma\upsilon\nu\theta = \dfrac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|}$ ή $\sigma\upsilon\nu\theta = \dfrac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$

10. Προβολή διανύσματος:

$\vec{\alpha} \cdot \vec{v} = \vec{\alpha} \cdot \pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}} \vec{v}$

11. ΠΡΟΣΟΧΗ!!! <u>Δεν ισχύουν</u>

α) Η προσεταιριστική ιδιότητα: δηλαδή: $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}) \neq (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma}$

β) Ο νόμος της διαγραφής: δηλαδή: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} \not\Rightarrow \vec{\gamma} = \vec{\beta}$ (<u>δεν διαγράφεται το</u> $\vec{\alpha}$)

γ) Η ιδιότητα μέτρου γινομένου δηλαδή: $|\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}| \neq |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$

δ) Η ιδιότητα δύναμης γινομένου: δηλαδή: $(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})^2 \neq \vec{\alpha}^2 \vec{\beta}^2$

ε) Οι ταυτότητες με περιττές δυνάμεις: δηλαδή: $(\vec{\alpha} + \vec{\beta})^3 \neq \vec{\alpha}^3 + 3\vec{\alpha}^2 \vec{\beta} + 3\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}^2 + \vec{\beta}^3$

ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

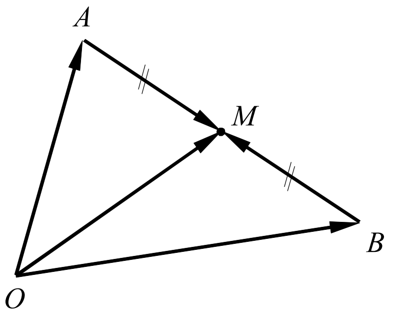
1 **Δίνεται ένα διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ και Μ το μέσο του, να αποδείξετε ότι για ένα σημείο Ο αναφοράς ισχύει: $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ και ένα σημείο αναφοράς *O*.

Για τη διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{OM}$ του μέσου *M* του τμήματος *AB* έχουμε: $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$ και

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM}$.



Επομένως, $2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM} =$

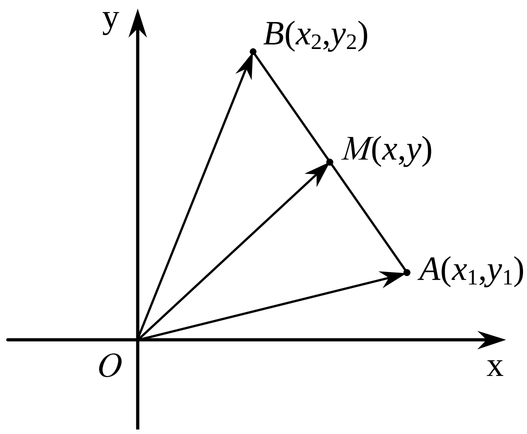
$2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ Άρα $\vec{OM} = \dfrac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}$

2	**Σε σύστημα αναφοράς xOy δίνεται τα σημεία $A(x_1,y_2)$ και $B(x_2,y_2)$ και M το μέσο του AB. Αν είναι $\vec{OA} = \vec{\alpha}$ και $\vec{OB} = \vec{\beta}$, να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες του μέσου M του διανύσματος $\vec{AB}$ είναι: $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ και $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ας θεωρήσουμε δύο σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ του καρτεσιανού επιπέδου και $M(x, y)$ είναι οι συντεταγμένες του μέσου του *AB*.

$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \Leftrightarrow$



Είναι $\overrightarrow{OM} = (x, y)$, $\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1)$, $\overrightarrow{OB} = (x_2, y_2)$

Τότε έχουμε ισοδύναμα

$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \Leftrightarrow$

$(x, y) = \frac{1}{2}[(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] \Leftrightarrow$

$(x, y) = [(\frac{1}{2}x_1, \frac{1}{2}y_1) + (\frac{1}{2}x_2, \frac{1}{2}y_2)]$

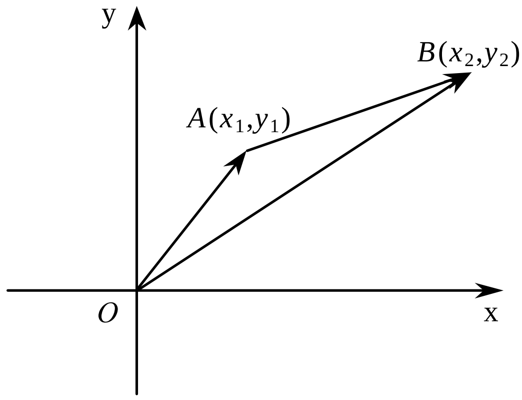
$(x, y) = = \left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$ Επομένως ισχύει $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ και $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$

3	**Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες (x, y) ενός διανύσματος με άκρα τα σημεία $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ δίνονται από τις σχέσεις: $x = x_2 - x_1$ και $y = y_2 - y_1$.**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω δύο σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ του καρτεσιανού επιπέδου και ας υποθέσουμε ότι (x, y) είναι οι συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{AB}$.

Είναι: $\overrightarrow{AB} = (x, y)$, $\overrightarrow{OB} = (x_2, y_2)$, και $\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1)$,



Τότε έχουμε ισοδύναμα: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \Leftrightarrow$

$(x, y) = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) \Leftrightarrow$

$(x, y) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

Άρα $x = x_2 - x_1$ και $y = y_2 - y_1$.

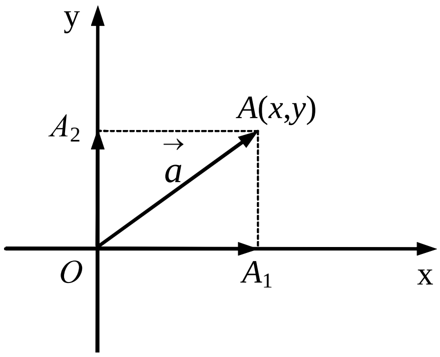
4 **Έστω ένα διάνυσμα $\vec{\alpha}=(x,y)$, να αποδείξετε ότι το μέτρο του είναι: $|\vec{\alpha}|=\sqrt{x^2+y^2}$.**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}=(x,y)$ ένα διάνυσμα του καρτεσιανού επιπέδου.
Το σημείο A έχει τετμημένη x και τεταγμένη y, και ισχύει $(OA_1)=|x|$ και $(OA_2)=|y|$.
Έτσι θα έχουμε:

$$|\vec{\alpha}|^2=(OA_1)^2+(A_1A)^2=$$
$$=(OA_1)^2+(OA_2)^2=.$$
$$=|x|^2+|y|^2=x^2+y^2$$

Άρα $|\vec{\alpha}|^2=x^2+y^2 \Rightarrow |\vec{\alpha}|=\sqrt{x^2+y^2}$

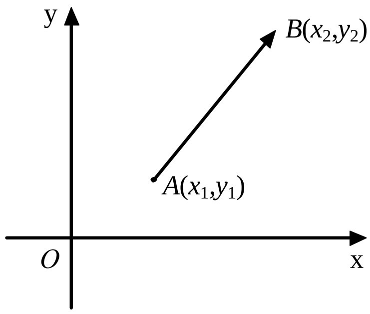


5 **Να αποδείξετε ότι η απόσταση των σημείων $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ είναι**
$$(AB)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θεωρούμε δύο σημεία $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ του καρτεσιανού επιπέδου. Επειδή η απόσταση (AB) των σημείων A και B είναι ίση με το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$, έχουμε:

$$(AB)=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$



6 **Να αποδείξετε την ισοδυναμία $\vec{\alpha}\ //\ \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1=\lambda_2$ όπου λ_1, λ_2 είναι οι συντελεστές διεύθυνσης των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ αντίστοιχα..**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω δύο διανύσματα $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ με συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντιστοίχως. Τότε έχουμε τις ισοδυναμίες:

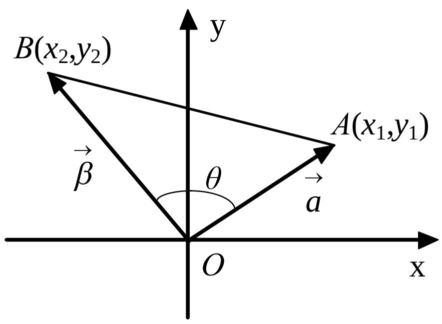
$$\vec{\alpha}//\vec{\beta} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow x_1y_2=x_2y_1 \Leftrightarrow \frac{y_1}{x_1}=\frac{y_2}{x_2} \Leftrightarrow \lambda_1=\lambda_2 .$$

7 **Να αποδείξετε ότι το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι ίσο με το άθροισμα των γινομένων των ομώνυμων συντεταγμένων τους. Δηλαδή $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=x_1x_2+y_1y_2$**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$
Με αρχή το Ο παίρνουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$.
Από το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΟΑΒ έχουμε:

$$(AB)^2=(OA)^2+(OB)^2-2(OA)(OB)\sigma\upsilon\nu\hat{\theta} \ (1)$$



η οποία ισχύει και στην περίπτωση που τα σημεία *O*, *A*, *B* είναι συνευθειακά.

Όμως είναι $(AB)^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$,

$(OA)^2=x_1^2+y_1^2$ και $(OB)^2=x_2^2+y_2^2$

Επομένως, από την (1) σχέση έχουμε διαδοχικά:

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2-2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$$

$$x_1^2+x_2^2-2x_1x_2+y_1^2+y_2^2-2y_1y_2=x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2-2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$$

$$-2x_1x_2-2y_1y_2=-2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} \quad \text{άρα} \quad \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=x_1x_2+y_1y_2$$

8 **Να αποδείξετε ότι:**
i) $\lambda\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}\cdot(\lambda\vec{\beta})=\lambda(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})$ **ii)** $\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}+\vec{\gamma})=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$ **iii)** $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow\lambda_1\cdot\lambda_2=-1$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$, $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ και $\vec{\gamma}=(x_3,y_3)$, τότε έχουμε:

i) $(\lambda\vec{\alpha})\cdot\vec{\beta}=(\lambda x_1,\lambda y_1)(x_2,y_2)=(\lambda x_1)x_2+(\lambda y_1)y_2=\lambda(x_1x_2+y_1y_2)=\lambda(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})$ και

$$\vec{\alpha}\cdot(\lambda\vec{\beta})=(x_1,y_1)(\lambda x_2,\lambda y_2)=x_1(\lambda x_2)+y_1(\lambda y_2)=\lambda(x_1x_2+y_1y_2)=\lambda(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}).$$

Άρα, $(\lambda\vec{\alpha})\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}\cdot(\lambda\vec{\beta})=\lambda(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})$

ii)
$$\begin{aligned}\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}+\vec{\gamma})&=(x_1,y_1)(x_2+x_3,y_2+y_3)=x_1(x_2+x_3)+y_1(y_2+y_3)\\&=(x_1x_2+x_1x_3)+(y_1y_2+y_1y_3)=(x_1x_2+y_1y_2)+(x_1x_3+y_1y_3)\\&=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}.\end{aligned}$$

iii) $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0\Leftrightarrow y_1y_2=-x_1x_2\Leftrightarrow\dfrac{y_1}{x_1}\dfrac{y_2}{x_2}=-1\Leftrightarrow\lambda_1\lambda_2=-1$

9 **Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι δύο διανύσματα και θ η γωνία των δύο αυτών διανυσμάτων, τότε να αποδείξετε ότι** $\text{συνθ}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ είναι δύο μη μηδενικά διανύσματα του επιπέδου που σχηματίζουν γωνία *θ*, τότε

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\text{συν}\theta \Rightarrow \text{συνθ}=\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}.$$

Είναι όμως $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=x_1x_2+y_1y_2$, $|\vec{\alpha}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$ και $|\vec{\beta}|=\sqrt{x_2^2+y_2^2}$

Επομένως η παραπάνω σχέση γίνεται: $\text{συνθ}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

1. Τι γνωρίζετε για την γωνία δύο διανυσμάτων ;

2.Τι λέγεται **μέτρο** του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$;Ποιο διάνυσμα λέγεται **μοναδιαίο**;

3.Τι λέγεται **φορέας** του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$; Πότε δύο μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ λέγονται **παράλληλα ή συγγραμμικά** ; Πως τα συμβολίζουμε ;

4. Πότε δύο μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ λέγονται **ομόρροπα** και πότε **αντίρροπα ;** Πως τα συμβολίζουμε ;

5 Πότε δύο μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ λέγονται **ίσα** και πότε **αντίθετα ;** Πως τα συμβολίζουμε ;

6. Να αποδειχθεί ότι: $\overrightarrow{\mathbf{AB}} = \overrightarrow{\mathbf{OB}} - \overrightarrow{\mathbf{OA}}$

7. Συμπληρώστε τα κενά :

- $\overrightarrow{AB} = - \ldots$
- $\overrightarrow{AB} = \ldots.$ $\Leftrightarrow$ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{A\Gamma} = \ldots.$
- Μ μέσο ΑΒ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AM} = \ldots$

8. Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ τρια διανύσματα να δείξετε ότι :

- $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{\beta}+\vec{\alpha}$ [Αντιμεταθετική]
- $\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)+\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+\left(\vec{\beta}+\vec{\gamma}\right)$ [Προσεταιριστική]
- $\vec{\alpha}+\vec{0}=\vec{\alpha}$ [Ουδέτερο στοιχείο]
- $\vec{\alpha}+\left(-\vec{\alpha}\right)=\vec{0}$ [Συμμετρικό Στοιχείο]

9. Να αποδείξετε ότι το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}$=(x , y) είναι ίσο με $\left|\vec{\alpha}\right| = \sqrt{x^2+y^2}$

10. Να αποδείξετε ότι η απόσταση των σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ είναι
$$(AB) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

11. Να αναφέρετε και να αποδείξετε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της παράστασης $\left|\vec{\boldsymbol{\alpha}}+\vec{\boldsymbol{\beta}}\right|$

12. Συμπληρώστε τα κενά :

α) $(\lambda \pm \mu)\vec{\alpha}$ = …………….
β) $\lambda(\vec{\alpha} \pm \vec{\beta})$ = ………………
γ) $\lambda(\mu\vec{\alpha})$ = ………………
δ)Αν $\lambda\,\vec{\alpha}=\lambda\,\vec{\beta}$ και $\lambda \neq 0$ τότε …………….
ε) Αν $\lambda\vec{\alpha} = \mu\vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ τότε ………………..
στ) $\lambda\vec{\alpha} = \vec{0} \Leftrightarrow$ ……………………….
ζ) $(-\lambda\vec{\alpha}) = \lambda(-\vec{\alpha}) = -(\lambda\vec{\alpha})$

13. Τι λέγεται γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{\boldsymbol{\alpha}},\vec{\boldsymbol{\beta}}$.

14. Αν $\vec{\boldsymbol{\alpha}},\vec{\boldsymbol{\beta}}$ δύο διανύσματα με $\vec{\boldsymbol{\beta}} \neq \vec{\mathbf{0}}$ με $\vec{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \vec{\boldsymbol{\beta}}$ ποια η σχέση μεταξύ τους $(\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{R})$;

15. Ορίστε και αποδείξτε την διανυσματική ακτίνα του μέσου ενός τμήματος.

16. Ποιες είναι οι συντεταγμένες του μέσου ενός τμήματος ;

17. Αν $\vec{\alpha}=(x,y)$, αποδείξτε ότι : $|\vec{\alpha}|=\sqrt{x^2+y^2}$

18 . Έστω $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$, $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$. Συμπληρώστε τα κενά :

- $\vec{\alpha}=\vec{\beta} \Leftrightarrow$ …… και …….
- $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=($ ………… , ………… $)$
- $\overrightarrow{\lambda\alpha}=($ ………… , ………… $)$
- $\overrightarrow{\lambda\alpha}+\mu\vec{\beta}=($ ………… , ………… $)$

19. Αποδείξτε ότι ένα διάνυσμα γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{i},\vec{j}$.

20. Ποιες είναι οι συντεταγμένες διανύσματος με γνωστά άκρα ; (απόδειξη)

21. Ποια η συνθήκη παραλληλίας διανυσμάτων αν είναι εκφρασμένα με συντεταγμένες

22. Πως ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης διανύσματος και τι ιδιότητες έχει;

23. Πως ορίζεται το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων;

24. Αν $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$ τότε πάντα ισχύει $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$;

25 . Συμπληρώστε τα κενά :

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=$ .... Αντιμεταθετική Ιδιότητα

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\Leftrightarrow$ ....

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\Leftrightarrow$ ....

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0\Leftrightarrow$ ....

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}=$.....=......

26. Αν $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}>0$ ή $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}<0$ ποιες οι σχετικές θέσεις των δύο διανυσμάτων;

27. Αποδείξτε την αναλυτική έκφραση του εσωτερικού γινομένου.

28 . Να αποδείξετε τις παρακάτω ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου :

$\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}\pm\vec{\gamma})=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\pm\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$ Επιμεριστική Ιδιότητα

$\lambda(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})=(\lambda\vec{\alpha})\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}\cdot(\lambda\vec{\beta})$

$\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow\lambda_{\vec{\alpha}}\lambda_{\vec{\beta}}=-1$ ($\vec{\alpha},\vec{\beta}$ όχι παράλληλα με τον y΄y)

29. Πως ορίζεται το συνημίτονο της γωνίας δύο διανυσμάτων;

30. Αποδείξτε ότι : $\boxed{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}\cdot \text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}}$ όπου $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}$ η προβολή του $\vec{\beta}$ πάνω στο $\vec{\alpha}$

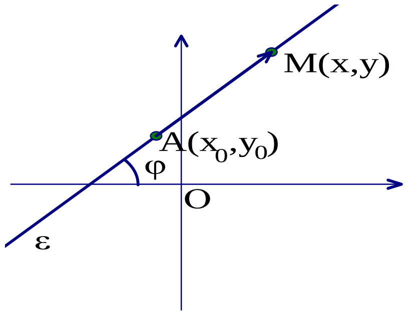
ΚΕΦΑΛΑΙΟ-2

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ - ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

1. Εξισώσεις ευθείας

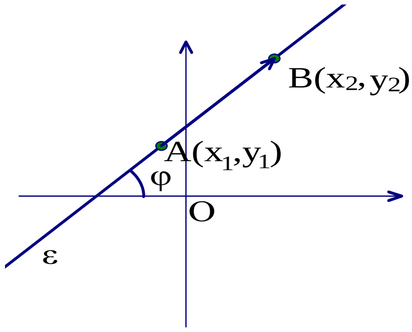
► **Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(x_0,y_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ , έχει εξίσωση:**

$$\boxed{y-y_0 = \lambda(x-x_0)}$$



► **Η μη κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$, έχει εξίσωση:**

$$\boxed{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)}$$



2. Ειδικές περιπτώσεις:

- Εξίσωση ευθείας που τέμνει τον y'y στο σημείο A(0,β):

$$y=\lambda x+\beta$$

- Εξίσωση ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων:

$$y=\lambda x$$

- Εξίσωση κατακόρυφης ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(x_o,y_o)$ (//y'y)

$$x=x_o$$

- Εξίσωση παράλληλης προς τον x'x ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(x_o,y_o)$

$$y=y_o$$

Παρατήρηση:Οι διχοτόμοι του πρώτου και δεύτερου τεταρτημορίου έχουν εξισώσεις **y=x** και **y=-x** αντίστοιχα.

3. Προσδιορισμός Εξίσωσης ευθείας:

Για να βρούμε την εξίσωση μιας ευθείας αρκεί να γνωρίζουμε τον συντελεστή διεύθυνσης (λ) και ένα σημείο από το οποίο διέρχεται (x_o , y_o) ……..οπότε **$y-y_o= \lambda (x - x_o)$**

4. Προσδιορισμός συντελεστή διεύθυνσης ευθείας …..που:

- Είναι παράλληλη σε άλλη γνωστή ευθεία.

$$\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$$

- Είναι παράλληλη σε γνωστό διάνυσμα $\vec{\alpha} = (x, y)$

$$\varepsilon // \vec{\alpha} \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = \lambda_{\vec{\alpha}}$$

(Θυμάμαι: $\lambda_{\vec{\alpha}} = \frac{y}{x}$)

- Είναι κάθετη σε άλλη γνωστή ευθεία:

$$\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$$

Βρίσκουμε την εξίσωση ευθείας όταν….

- **Γνωρίζουμε ένα σημείο της ευθείας και τον συντελεστή διεύθυνσής της**

ή

- **Γνωρίζουμε δύο σημεία της**

- Είναι κάθετη σε γνωστό διάνυσμα $\vec{\alpha} = (x, y)$

$$\varepsilon \perp \vec{\alpha} \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon} \cdot \lambda_{\vec{\alpha}} = -1$$

- Διέρχεται από 2 γνωστά σημεία $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

- Σχηματίζει γωνία ω με τον x'x:

$$\lambda = \varepsilon\phi\omega$$

- Αν $\varepsilon // x'x$ τότε $\lambda_{\varepsilon} = 0$
- Αν $\varepsilon // y'y$ τότε δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης.

ΧΡΗΣΙΜΑ

- Αν γνωρίζουμε την κλίση λ μπορούμε να βρούμε την γωνία από την σχέση εφω=λ.
- Ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας ε μπορεί να βρεθεί έμμεσα: Από μια ευθεία παράλληλη στην ε ή από μια ευθεία κάθετη στην ε
- Θέτοντας στην εξίσωση της ευθείας:
x=0, βρίσκουμε την τομή της με τον y΄y
y=0, βρίσκουμε την τομή της με τον χ΄χ
- Τρία σημεία είναι συνευθειακά όταν το ένα ανήκει στην ευθεία που ορίζουν τα άλλα δύο

5. Γενική μορφή εξίσωσης ευθείας:

$Ax + By + \Gamma = 0$ με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$

με συντελεστή διεύθυνσης: $\lambda = -\frac{A}{B}$ $(B \neq 0)$

- Αν $B \neq 0$ τότε η ε τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο $(0, -\frac{\Gamma}{B})$
- Αν $B=0$ τότε η εξίσωση γίνεται $x = -\frac{\Gamma}{A}$

Παρατηρήσεις:

- Η ευθεία με εξίσωση Ax+By+Γ=0 είναι παράλληλη στο διάνυσμα

$$\vec{\delta} = (B, -A).$$

- Η ευθεία με εξίσωση Ax+By+Γ=0 είναι κάθετη στο διάνυσμα

$$\vec{n} = (A, B).$$

6. Απόσταση σημείου M_o (x_o, y_o) από ευθεία ε: Ax+By+Γ=0:

$$d(M_o, \varepsilon) = \frac{|Ax_o + By_o + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

7. Εμβαδόν τριγώνου:

Με κορυφές τα σημεία $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ και $\Gamma(x_3, y_3)$:

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})\right| = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{Vmatrix}$$

ή

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{B\Gamma})\right| = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & y_3 - y_2 \end{Vmatrix}$$

ή

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{\Gamma A}, \overrightarrow{\Gamma B})\right| = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \end{Vmatrix}$$

8. Απόσταση παράλληλων ευθειών:

Αν ε_1: $y = \lambda x + \beta_1$ και ε_2 : $y = \lambda x + \beta_2$ τότε

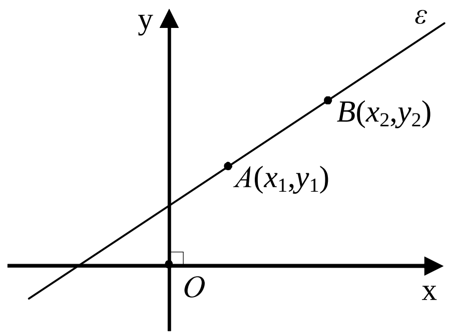
$$d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{|\beta_1 - \beta_2|}{\sqrt{1 + \lambda^2}}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

1	**Να αποδείξετε ότι ο συντελεστής διεύθυνσης λ μιας ευθείας που διέρχεται από τα σημεία** $A(x_1, y_1)$ **και** $B(x_2, y_2)$**, με** $x_1 \neq x_2$ **είναι** $\lambda = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω δύο τυχαία σημεία $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ μιας ευθείας (ε) που δεν είναι κάθετη στον άξονα xx΄.



τότε ο συντελεστής διεύθυνσης λ της ευθείας (ε)

είναι ίσος με το συντελεστή διεύθυνσης του διανύσματος

$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$,

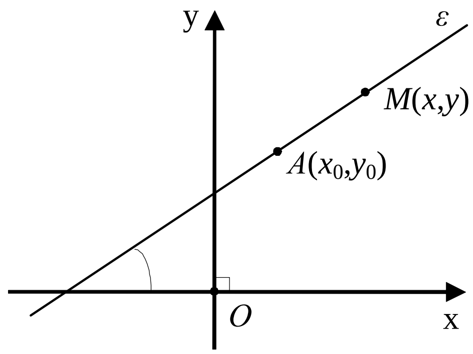
δηλαδή $\lambda = \lambda_{\overrightarrow{AB}} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Άρα $\lambda = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

2	**Σε σύστημα συντεταγμένων Oxy δίνεται ευθεία (ε) με συντελεστή διεύθυνσης λ και ένα σημείο της** $A(x_o, y_o)$ **. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι** $y - y_o = \lambda(x - x_o)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω *Oxy* ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και $A(x_0, y_0)$ ένα σημείο του επιπέδου.

Έστω ένα δεύτερο σημείο $M(x, y)$ διαφορετικό του $A(x_0, y_0)$ της ευθείας *ε*



Είναι $\overrightarrow{AM} = (x - x_0, y - y_0)$ και $\lambda_{\overrightarrow{AM}} = \dfrac{y - y_0}{x - x_0}$

Ισχύουν οι ισοδυναμίες: $\overrightarrow{AM} \,//\, \varepsilon, \Leftrightarrow \lambda_{AM} = \lambda_{\varepsilon} \Leftrightarrow \dfrac{y - y_0}{x - x_0} = \lambda \Leftrightarrow y - y_0 = \lambda(x - x_0)$.

Η τελευταία εξίσωση επαληθεύεται και από το σημείο $A(x_0, y_0)$. Άρα η εξίσωση της ευθείας *ε* είναι: $y - y_o = \lambda(x - x_o)$

3	**Να αποδείξετε ότι** *ε* **η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία** $A(x_1, y_1)$ **και** $B(x_2, y_2)$ **έχει εξίσωση** $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

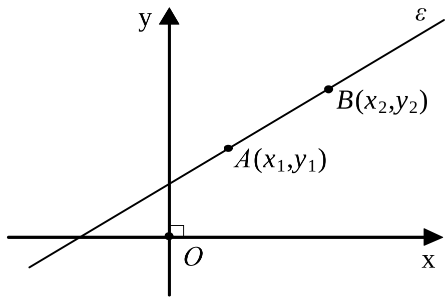
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω δύο τυχαία σημεία $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ της ευθείας (ε)

Αν $x_1 \neq x_2$, τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας είναι $\lambda = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

και επομένως η εξίσωση $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$

γίνεται: $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

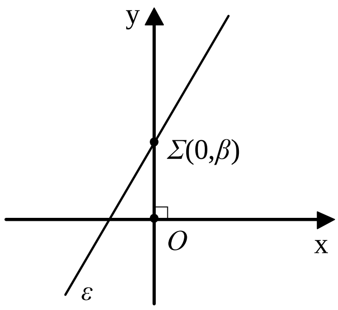


4	**Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία του επιπέδου έχει εξίσωση της μορφής Αx+Βy+Γ=0 με Α≠0 ή Β≠0 και αντιστρόφως, κάθε εξίσωση της μορφής Αx+Βy+Γ=0 με Α≠0 ή Β≠0 παριστάνει ευθεία γραμμή**

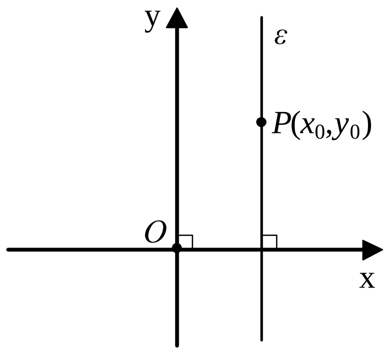
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

►Έστω ε μια ευθεία στο καρτεσιανό επίπεδο.

- Αν η ευθεία ε τέμνει τον άξονα yy' στο σημείο $\Sigma(0,\beta)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ, τότε θα έχει εξίσωση $y = \lambda x + \beta$, η οποία γράφεται $\lambda x + (-1)y + \beta = 0$



- Αν η ευθεία ε είναι κατακόρυφη και διέρχεται από το σημείο $P(x_0, y_0)$, τότε θα έχει εξίσωση $x = x_0$, η οποία γράφεται ισοδύναμα $x + 0 \cdot y + (-x_0) = 0$.



Επομένως και στις δύο περιπτώσεις η εξίσωση της ευθείας ε παίρνει τη μορφή $Ax + By + \Gamma = 0$ με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$.

► **Αντίστροφα,** έστω η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$.

— Αν $B \neq 0$, τότε η εξίσωση γράφεται $y = -\dfrac{A}{B}x - \dfrac{\Gamma}{B}$, που είναι εξίσωση ευθείας με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -\dfrac{A}{B}$ και η οποία τέμνει τον άξονα yy' στο σημείο $\left(0, -\dfrac{\Gamma}{B}\right)$.

— Αν $B = 0$, τότε, λόγω της υπόθεσης, είναι $A \neq 0$ και η εξίσωση γράφεται $x = -\dfrac{\Gamma}{A}$, που είναι εξίσωση ευθείας κάθετης στον άξονα $x'x$ στο σημείο του $P\left(-\dfrac{\Gamma}{A}, 0\right)$.

Άρα σε κάθε περίπτωση η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$ παριστάνει ευθεία.

5	**Να αποδείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση** $Ax+By+\Gamma=0$ **είναι παράλληλη στο διάνυσμα** $\vec{\delta}=(B,-A)$**.**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ε μια ευθεία με εξίσωση $Ax+By+\Gamma=0$ και διάνυσμα $\vec{\delta}=(B,-A)$

- Αν $B\neq 0$, τότε η ε έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=-\frac{A}{B}$ και το διάνυσμα $\lambda_{\delta}=-\frac{A}{B}$. Επειδή οι συντελεστές τους είναι ίσοι τότε η ευθεία είναι παράλληλη με το διάνυσμα.

- Αν $B=0$, τότε η ε και το διάνυσμα $\vec{\delta}$ είναι παράλληλα προς τον άξονα yy' επομένως και μεταξύ τους παράλληλα.

6	**Να αποδείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση Αx + By + Γ = 0 είναι κάθετη στο διάνυσμα** $\vec{n}=(A,B)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Είναι $\vec{\delta}\cdot\vec{n}=(B,-A)\cdot(A,B)=AB-AB=0$

Επομένως το διάνυσμα $\vec{\delta}=(B,-A)$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{n}=(A,B)$. Επειδή το διάνυσμα $\vec{\delta}$ είναι παράλληλο με την ευθεία $Ax+By+\Gamma=0$, η ευθεία αυτή θα είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{n}=(A,B)$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

1. Τι ονομάζουμε **γωνία ω της ευθείας (ε) με τον x΄x ;**
Ποιες τιμές παίρνει η γωνία ω ;

2 . Τι ονομάζουμε **συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας** (ε) ; Όλες οι ευθείες έχουν συντελεστή διεύθυνσης ;

3 . Να αποδείξετε ότι : (ε) // $\vec{\alpha}=(x,y)$, ($x\neq 0$) $\Leftrightarrow$ $\lambda_{\varepsilon}=\lambda_{\vec{\alpha}}$

4 .Δείξτε ότι :

- $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_1}=\lambda_{\varepsilon_2}$
- $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_1}\cdot\lambda_{\varepsilon_2}=-1$

5. Υπάρχουν δύο ευθείες ε_1, ε_2 με συντελεστές διεύθυν-σης λ_1, λ_2 αντίστοιχα για τις οποίες ισχύει συγχρόνως $\lambda_1=\lambda_2$ και $\lambda_1 . \lambda_2 = -1$. **Σ** **Λ**

6. Οι ευθείες με εξισώσεις $y=\frac{1}{|\lambda|}x$ και $y=-\lambda x$ είναι κάθετες για κάθε $\lambda\neq 0$. **Σ** **Λ**

7.Η ευθεία $\frac{x}{\beta}+\frac{y}{\alpha}=1$ με $\alpha, \beta\neq 0$ τέμνει τους άξονες στα σημεία Α (α, 0) και Β (0, β). **Σ** **Λ**

8.Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(x_0 , y_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι : $y-y_0=\lambda(x-x_0)$

9. Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1 , y_1)$ και $B(x_2 , y_2)$ με $x_1 \neq x_2$ έχει εξίσωση : $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

10. Να αποδείξετε ότι η ευθεία του επιπέδου που έχει συντελεστή διεύθυνσης λ και τέμνει τον y΄y στο Β(0 ,β)έχει εξίσωση $y = λx + β$

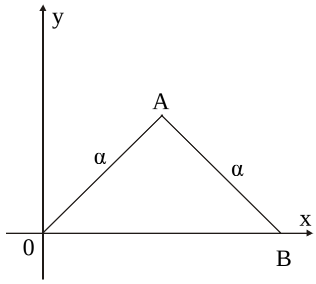
11 .Να γράψετε την εξίσωση της ευθείας σε κάθε περίπτωση :

- Όταν διέρχεται από την αρχή των αξόνων(και δεν είναι ο y΄y)
- Όταν είναι παράλληλη στον x΄x και διέρχεται από το $A(x_0 , y_0)$
- Όταν είναι παράλληλη στον y΄y και διέρχεται από το $A(x_0 , y_0)$
- Όταν είναι διχοτόμος της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων .
- Όταν είναι διχοτόμος της 2ης και 4ης γωνίας των αξόνων .

12.Στο διπλανό σχήμα η εξίσωση της ευθείας ΟΑ είναι $y = \sqrt{3}x$. Η γωνία ΟΑΒ ισούται με

Α. 30° **Β.** 60° **Γ.** 45°

Δ. 90° **Ε.** 135°



13. Ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας (ε), που διέρχεται από τα σημεία Α (x_1, y_1) και Β (x_2, y_2) ορίζεται πάντα όταν

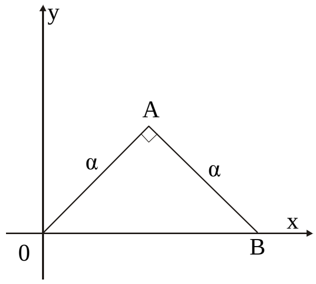
Α. $y_1 \neq y_2$ **Β.** $x_1 = x_2$ και $y_1 \neq y_2$

Γ. $x_1 \neq - x_2$ και $y_1 \neq y_2$ **Δ.** $y_1 = y_2$ και $x_1 = x_2$ **Ε.** $x_1 \neq x_2$

14. Στο διπλανό σχήμα η γωνία ΟΑΒ είναι ορθή. Η εξίσωση της ευθείας ΟΑ είναι

Α. $y = \dfrac{α}{β}x$ **Β.** $y = \dfrac{β}{α}x$ **Γ.** $y = \sqrt{α}\,x$

Δ. $y = αβx$ **Ε.** $y = x$



15.. Δείξτε ότι :
Κάθε ευθεία του επιπέδου έχει εξίσωση της μορφής Αx+By+ Γ = 0 με Α≠0 ή Β ≠ 0 (1) και αντίστροφα κάθε εξίσωση της μορφής (1) παριστάνει ευθεία γραμμή .

16 . Δείξτε ότι η ευθεία με εξίσωση της μορφής Αx+By+ Γ = 0 είναι

- Παράλληλη στο $\vec{δ}=(Β , -Α)$
- Κάθετη στο $\vec{η}=(Α , Β)$

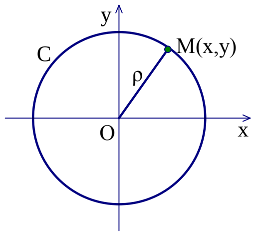
17 .Να γράψετε τους τύπους

- Της απόστασης του $M(x_0 , y_0)$ από την ευθεία με εξίσωση Αx+By+ Γ = 0 .
- Του εμβαδού τριγώνου με κορυφές $A(x_1 , y_1)$, $B(x_2 , y_2)$, $Γ(x_3 , y_3)$.
- Της απόστασης των παραλλήλων $ε_1 : y = λx + β_1$ και $ε_2 : y = λx + β_2$

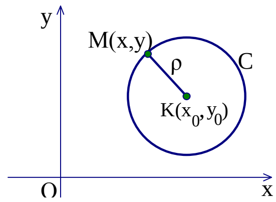
ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ - ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Α ΚΥΚΛΟΣ

1. Ορισμοί :

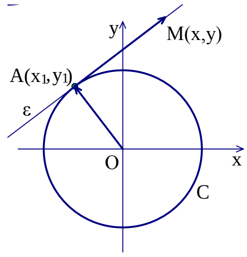


- Ο κύκλος με κέντρο την αρχή Ο των αξόνων και ακτίνα ρ
  έχει εξίσωση: $\boxed{x^2+y^2=\rho^2}$



- Ο κύκλος με κέντρο το σημείο $K(x_0,y_0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση:
  $\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2}$

2. Εφαπτόμενη εξίσωσης κύκλου :



- Η εφαπτομένη του κύκλου $x^2+y^2=\rho^2$
  στο σημείο του $A(x_1,y_1)$έχει εξίσωση:
  $\boxed{xx_1+yy_1=\rho^2}$

- Για την εφαπτομένη του κύκλου $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2$

Θεωρούμε την εύθεία (ε) $\psi=\alpha\chi+\beta$ και ισχύουν :
Αν $K(\chi_0 , \psi_0)$ το κέντρο , $A(\chi_1,\psi_1)$ το σημείο επαφής και
$M(\chi,\psi)$ τυχαίο σημείο της τότε

► $\overrightarrow{KA}\cdot\overrightarrow{AM}=0$

► $d(K,\varepsilon)=\rho \Leftrightarrow \dfrac{|\alpha\chi_0-1\cdot\psi_0+\beta|}{\sqrt{\alpha^2+1^2}}=\rho$

Εφαπτομένη κύκλου $x^2+y^2=\rho^2$

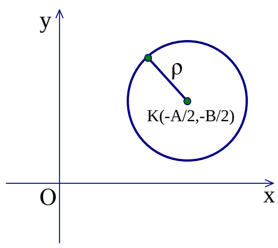
Για να γράψουμε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου C:

- Αν <u>γνωρίζουμε</u> το σημείο επαφής $A(x_1,y_1)$, η εξίσωση προκύπτει άμεσα από τον τύπο $xx_1+yy_1=\rho^2$
- Αν <u>δεν γνωρίζουμε</u> το σημείο επαφής τότε το ονομάζουμε έστω $A(x_1,y_1)$, γράφουμε την εφαπτομένη στο Α και έχουμε

i) Οι συντεταγμένες του Α επαληθεύουν την εξίσωση του κύκλου C

ii) Η εφαπτομένη ικανοποιεί την συνθήκη του ζητήματος

3. Γενική εξίσωση κύκλου :



i) Κάθε κύκλος έχει εξίσωση της μορφής

$x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$, με $A^2+B^2-4\Gamma>0$

ii) Η εξίσωση $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$,

με $A^2+B^2-4\Gamma>0$ παριστάνει κύκλο

4. Θέσεις ευθείας και κύκλου :

► Για να είναι η <u>ευθεία ε εφαπτομένη του κύκλου</u> κέντρου $K(x_0,y_0)$ και ακτίνας ρ ,αρκεί να ισχύει $d(K , \varepsilon)=\rho$

► Οι Σχετικές θέσεις ευθείας – κύκλου προκύπτουν είτε από την λύση του συστήματος των εξισώσεών τους είτε από την σύγκριση $d(K , \varepsilon)$ με το ρ

Θέσεις ευθείας και κύκλου :

► $d(K , \varepsilon)=\rho$ ↔ Η ευθεία είναι εφαπτόμενη του κύκλου

► $d(K , \varepsilon)<\rho$ ↔Η ευθεία είναι τέμνουσα και έχει 2 κοινά σημεία με τον κύκλο

► $d(K , \varepsilon)>\rho$ ↔Η ευθεία δεν έχει κοινά σημεία με τον κύκλο

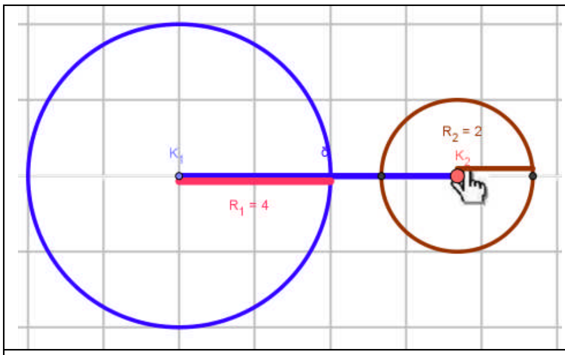
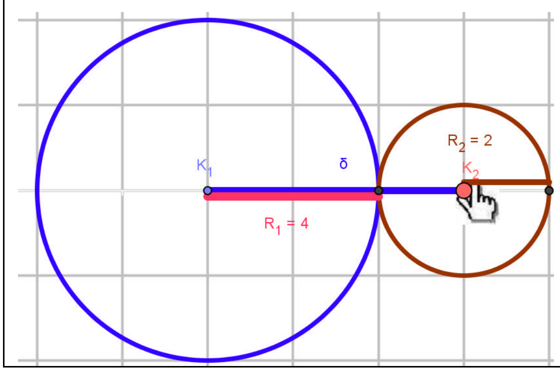
5. Θέσεις δύο κύκλων :

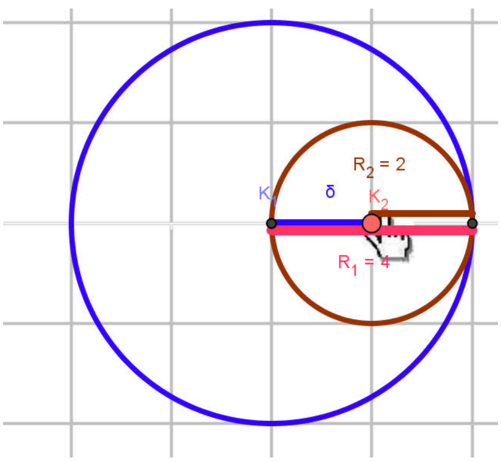
Για να βρω την θέση 2 κύκλων λύνουμε το σύστημα:

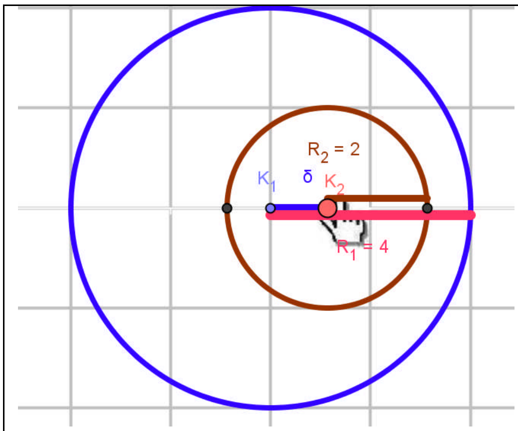
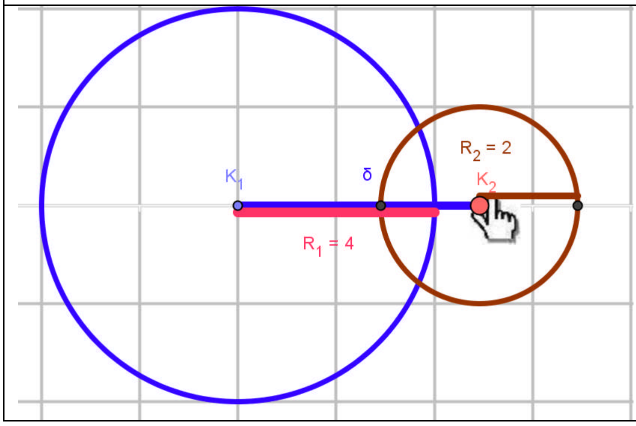
$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2+\mathrm{A}_1x+\mathrm{B}_1y+\Gamma_1 \\ x^2+y^2+\mathrm{A}_2x+\mathrm{B}_2y+\Gamma_2 \end{array}\right\} (\textit{Σύστημα των εξισώσεων των 2 κύκλων})$$

1)Αν το σύστημα έχει 2 λύσεις τότε οι δύο κύκλοι τέμνονται. Η λύση του συστήματος μας είναι τα 2 σημεία στα οποία τέμνονται οι 2 κύκλοι. Η κοινή χορδή είναι κάθετη στη διάκεντρο δ.
2) Αν το σύστημα έχει 1 λύση τότε οι δύο κύκλοι εφάπτονται . Η μοναδική λύση είναι το σημείο επαφής .
3) Αν το σύστημα έχει δεν έχει λύση στο R τότε οι δύο κύκλοι δεν έχουν κοινό σημείο .

Γεωμετρικά:

	Διάκεντρος = δ **Οι κύκλοι δεν τέμνονται** $R_1+R_2<\delta$
	**Οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά** $R_1+R_2=\delta$

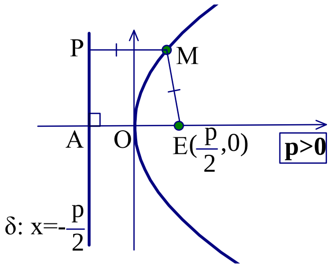
	**Οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά** $\lvert R_1-R_2\rvert=\delta$

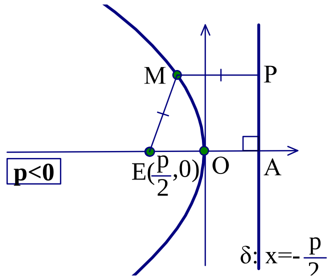
	**Οι κύκλοι δεν τέμνονται** $\left\|R_1 - R_2\right\| > \delta$
	**Οι κύκλοι τέμνονται** $\left\|R_1 - R_2\right\| < \delta < R_1 + R_2$

B ΠΑΡΑΒΟΛΗ

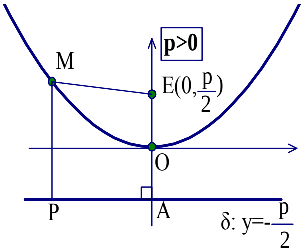
1. Ορισμοί :

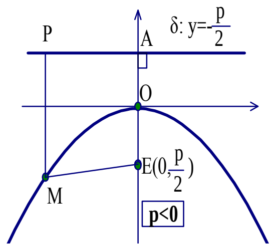
- **Η εξίσωση της παραβολής με εστία Ε($\frac{p}{2}$,0) και διευθετούσα δ: x=-$\frac{p}{2}$** είναι $\boxed{y^2=2px}$





- **Η εξίσωση της παραβολής με εστία Ε(0,$\frac{p}{2}$) και διευθετούσα δ: y=-$\frac{p}{2}$** είναι $\boxed{x^2=2py}$

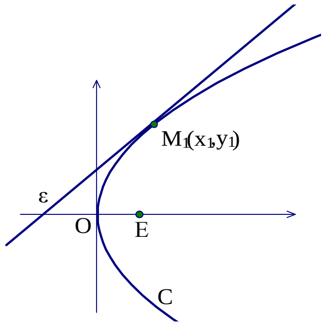




2. Εφαπτόμενη Παραβολής:

Η εφαπτομένη ε στο σημείο $M_1(x_1,y_1)$ της παραβολής:

- $y^2=2px$ έχει εξίσωση $\boxed{yy_1=p(x+x_1)}$
- $x^2=2py$ έχει εξίσωση $\boxed{xx_1=p(y+y_1)}$



Εφαπτομένη παραβολής
Για να γράψουμε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής C • Αν γνωρίζουμε το σημείο επαφής $A(x_1,y_1)$, η εξίσωση προκύπτει άμεσα από τους τύπους • Αν δεν γνωρίζουμε το σημείο επαφής τότε το ονομάζουμε έστω $A(x_1,y_1)$, γράφουμε την εφαπτομένη στο Α και έχουμε i) Οι συντεταγμένες του Α επαληθεύουν την εξίσωση της παραβολής ii) Η εφαπτομένη ικανοποιεί την συνθήκη του ζητήματος

3. Ιδιότητες Παραβολής:

- Η παραβολή $y^2=2px$

↦ έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και άξονα συμμετρίας τον χ΄χ

↦ βρίσκεται: δεξιά του y΄y αν p>0 , αριστερά του y΄y αν p<0

- Η παραβολή $x^2=2py$

↦ έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και άξονα συμμετρίας τον y΄y

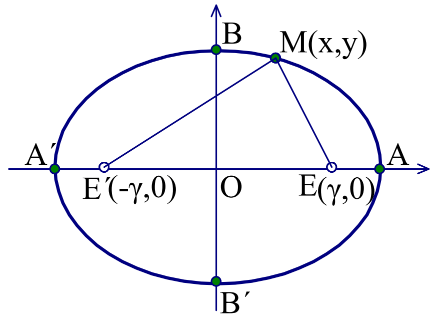
↦ βρίσκεται: πάνω από τον χ΄χ αν p>0 , κάτω από τον χ΄χ αν p<0

- Το **p** λέγεται **παράμετρος** της παραβολής (p>0 ή p<0)
- Η **απόσταση εστίας – διευθετούσας** ισούται με |**p**|

ΕΠΙΣΥΜΑΝΣΕΙΣ
►Για να γράψουμε την εξίσωση μιας παραβολής πρέπει να γνωρίζουμε τον άξονα συμμετρίας της και την παράμετρο p Η παράμετρος p βρίσκεται: • Αν είναι γνωστή η εστία • Αν είναι γνωστή η διευθετούσα • Από τις δοσμένες συνθήκες ►Ευθεία εφαπτομένη σε παραβολή Για να εφάπτεται η ευθεία ε στην παραβολή C απαιτούμε η η εφαπτόμενη της παραβολής σε ένα τυχαίο σημείο της ,να ταυτίζεται με την δοσμένη ευθεία.

Γ ΕΛΛΕΙΨΗ

1Α. Ορισμοί :



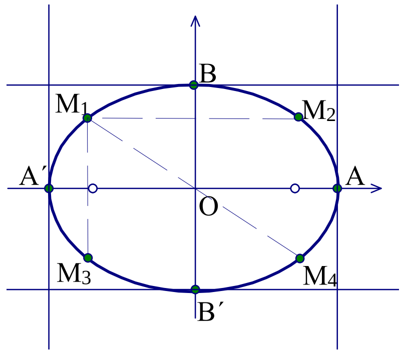
Ε΄Ε=2γ , ΜΕ΄+ΜΕ=2α

- **Η εξίσωση της έλλειψης**
  με εστίες Ε΄(-γ,0) και Ε(γ,0)

και σταθερό άθροισμα 2α είναι

$\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$ ή $\boxed{\beta^2x^2+\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2}$ $\boxed{\beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}}$

- **Ιδιότητες** της έλλειψης **C :** $\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$, $0<\beta<\alpha$



↦ Τέμνει τον χ΄χ στα σημεία Α΄(-α,0) και Α(α,0)

↦ Το τμήμα **Α΄Α** λέγεται **μεγάλος άξονας** της C με μήκος **(Α΄Α)=2α**

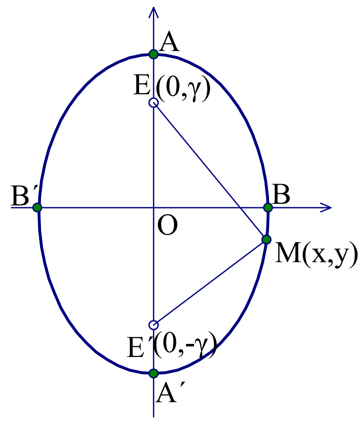
↦ Τέμνει τον y΄y στα σημεία Β΄(0,-β) και Β(0,β)

↦ Το τμήμα **Β΄Β** λέγεται **μικρός άξονας** της C με μήκος **(Β΄Β)=2β**

↦ Η έλλειψη περιέχεται στο ορθογώνιο που ορίζουν οι ευθείες

x=-α , x=α , y=-β , y=β **($-\alpha\le x\le\alpha$ και $-\beta\le y\le\beta$)**

1Β. Ορισμοί :



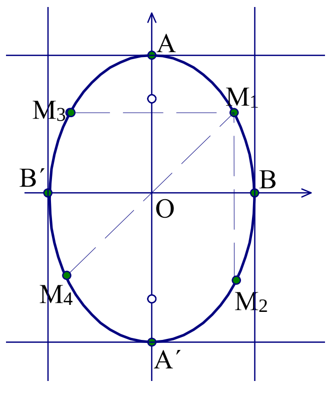
Ε΄Ε=2γ , ΜΕ΄+ΜΕ=2α

- **Η εξίσωση της έλλειψης**
  με εστίες Ε΄(0,-γ) και Ε(0,γ)

και σταθερό άθροισμα 2α είναι

$\dfrac{y^2}{\alpha^2}+\dfrac{x^2}{\beta^2}=1$ ή $\boxed{\alpha^2x^2+\beta^2y^2=\alpha^2\beta^2}$ $\boxed{\beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}}$

- **Ιδιότητες** της έλλειψης **C :** $\dfrac{y^2}{\alpha^2}+\dfrac{x^2}{\beta^2}=1$, $0<\beta<\alpha$



↦ Τέμνει τον y΄y στα σημεία Α΄(0,-α) και Α(0,α)

↦ Το τμήμα **Α΄Α** λέγεται **μεγάλος άξονας** της C με μήκος **(Α΄Α)=2α**

↦ Τέμνει τον χ΄χ στα σημεία Β΄(-β,0) και Β(β,0)

↦ Το τμήμα **Β΄Β** λέγεται **μικρός άξονας** της C με μήκος **(Β΄Β)=2β**

↦ Η έλλειψη περιέχεται στο ορθογώνιο που ορίζουν οι ευθείες

x=-β , x=β , y=-α , y=α **($-\beta\le x\le\beta$ και $-\alpha\le y\le\alpha$)**

- **Κοινές ιδιότητες**

↦ Οι εστίες Ε΄ , Ε της έλλειψης είναι πάντα πάνω στον μεγάλο άξονα Α΄Α

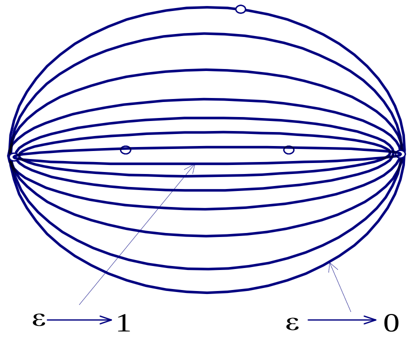
↦ Η έλλειψη έχει **άξονες συμμετρίας** τους **χ΄χ** και **y΄y** και **κέντρο συμμετρίας** την αρχή **Ο(0,0)** των αξόνων

↦ Το **Ο** λέγεται **κέντρο της έλλειψης** και τα **Α΄ , Α , Β΄ , Β** λέγονται **κορυφές της έλλειψης**

↦ **Διάμετρος** της έλλειψης λέγεται **οποιαδήποτε χορδή που διέρχεται από το κέντρο της**

Για κάθε διάμετρο M_1M_4 ισχύει: $2\beta\le(M_1M_4)\le2\alpha$

2.Εκκεντρότητα έλλειψης



- **Εκκεντρότητα ε** της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$

(ή $\frac{y^2}{\alpha^2}+\frac{x^2}{\beta^2}=1$) λέγεται ο λόγος: $\boxed{\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}}$

- Είναι $\varepsilon<1$ (αφού $\gamma<\alpha$)

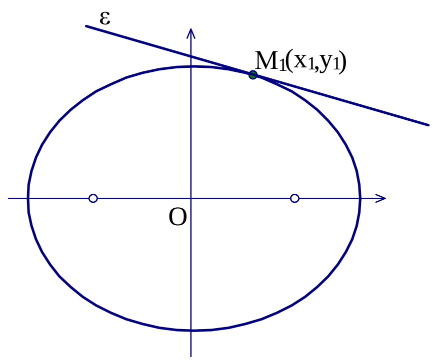
  είναι μικρότερη της μονάδος

- Είναι $\frac{\beta}{\alpha}=\sqrt{1-\varepsilon^2}$ δηλαδή

ο λόγος των αξόνων της έλλειψης είναι συνάρτηση της εκκεντρότητας

3. Εφαπτόμενη Έλλειψης:

Η εφαπτομένη ε στο σημείο $M_1(x_1,y_1)$ της έλλειψης:



- $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ **έχει εξίσωση** $\frac{xx_1}{\alpha^2}+\frac{yy_1}{\beta^2}=1$

$\mapsto \beta^2x^2+\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2$ ›› $\beta^2xx_1+\alpha^2yy_1=\alpha^2\beta^2$

- $\frac{y^2}{\alpha^2}+\frac{x^2}{\beta^2}=1$ **έχει εξίσωση** $\frac{yy_1}{\alpha^2}+\frac{xx_1}{\beta^2}=1$

$\mapsto \alpha^2x^2+\beta^2y^2=\alpha^2\beta^2$ ›› $\alpha^2xx_1+\beta^2yy_1=\alpha^2\beta^2$

Εξίσωση - Εφαπτομένη Έλλειψης

Α. Εξίσωση έλλειψης

Για να γράψουμε την εξίσωση μιας έλλειψης πρέπει να γνωρίζουμε ή να βρούμε:

- **τις παραμέτρους α και β , ($\beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}$)**
- **τον άξονα (χ΄χ ή y΄y) που βρίσκονται οι εστίες**

Η θέση του α^2 στην έλλειψη εξαρτάται από τον άξονα (χ΄χ ή y΄y) που βρίσκονται οι εστίες

Β. Για να γράψουμε την εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης C

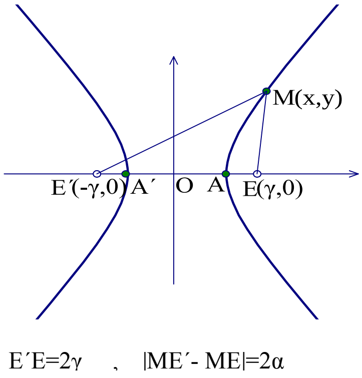
- **Αν <u>γνωρίζουμε</u> το σημείο επαφής $A(x_1,y_1)$, η εξίσωση προκύπτει άμεσα από τους τύπους**
- **Αν <u>δεν γνωρίζουμε</u> το σημείο επαφής τότε το ονομάζουμε έστω $A(x_1,y_1)$, γράφουμε την εφαπτομένη στο Α και έχουμε**

i) Οι συντεταγμένες του Α επαληθεύουν την εξίσωση της έλλειψης
ii) Η εφαπτομένη ικανοποιεί την συνθήκη του ζητήματος

Γ. Ευθεία εφαπτομένη σε έλλειψη

- **Για να εφάπτεται η ευθεία ε στην έλλειψη C απαιτούμε η η εφαπτόμενη της έλλειψης σε ένα τυχαίο σημείο της ,να ταυτίζεται με την δοσμένη ευθεία.**
- **Αλλιώς για να εφάπτεται η ευθεία ε στην έλλειψη C πρέπει το σύστημα των εξισώσεών τους να έχει μία λύση**
- **<u>Προσοχή όμως</u> !!! Ο τρόπος αυτός δεν ισχύει γενικά για όλες τις κονικές τομές ή για καμπύλες.**
  Πχ η ευθεία ψ=2 και η παραβολή $\psi^2=4\chi$ έχουν ένα κοινό σημείο ,χωρίς όμως η ευθεία να είναι εφαπτόμενη !!

Δ ΥΠΕΡΒΟΛΗ

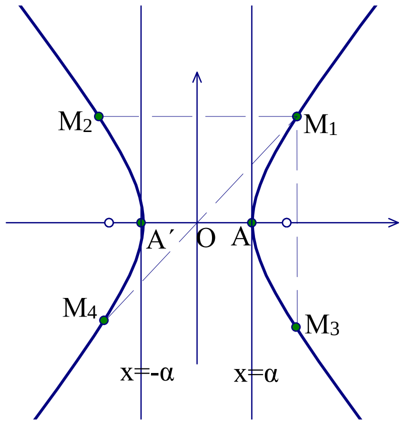


1Α. Ορισμοί :

Η εξίσωση της υπερβολής
με εστίες Ε΄(-γ,0) και Ε(γ,0)
και σταθερή διαφορά 2α είναι

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1 \quad ή \quad \boxed{\beta^2x^2-\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2} \quad \boxed{\beta=\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}}$$

Ιδιότητες της υπερβολής **C :** $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$



↦ Τέμνει τον χ΄χ στα σημεία **Α΄(-α,0)** και **Α(α,0)**. Είναι **(Α΄Α)=2α**

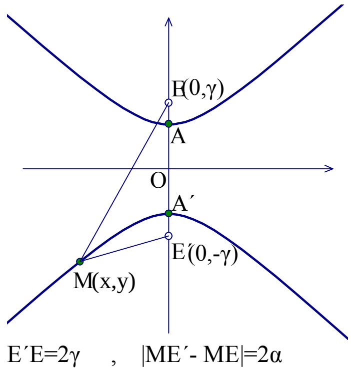
↦ **Δεν τέμνει τον y΄y**

↦ Για κάθε σημείο Μ(x,y) της υπερβολής C ισχύει

$(x\le -\alpha$ **και** $y\in\mathbb{R})$ ή $(x\ge \alpha$ **και** $y\in\mathbb{R})$

↦ Η υπερβολή βρίσκεται έξω από την «ταινία» που ορίζουν οι ευθείες **x=-α , x=α**

↦ Αν **α=β** η C γράφεται $x^2-y^2=\alpha^2$ **(Ισοσκελής υπερβολή)**

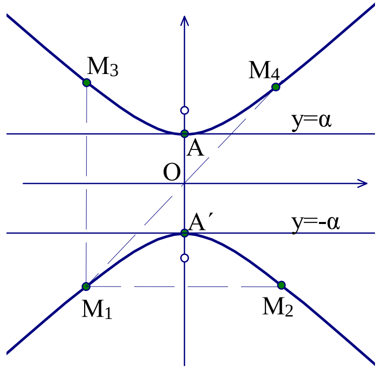


1Β. Ορισμοί :

Η εξίσωση της υπερβολής
με εστίες Ε΄(-γ,0) και Ε(γ,0)
και σταθερή διαφορά 2α είναι

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1 \quad ή \quad \boxed{\beta^2x^2-\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2} \quad \boxed{\beta=\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}}$$

Ιδιότητες της υπερβολής **C :** $\frac{y^2}{\alpha^2}-\frac{x^2}{\beta^2}=1$,



↦ Τέμνει τον y΄y στα σημεία **Α΄(0,-α)** και **Α(0,α)**. Είναι **(Α΄Α)=2α**

↦ **Δεν τέμνει τον χ΄χ**

↦ Για κάθε σημείο Μ(x,y) της υπερβολής C ισχύει

$(y\le -\alpha$ **και** $x\in\mathbb{R})$ ή $(y\ge \alpha$ **και** $x\in\mathbb{R})$

↦ Η υπερβολή βρίσκεται έξω από την «ταινία» που ορίζουν οι ευθείες **y=-α , y=α**

↦ Αν **α=β** η C γράφεται $y^2-x^2=\alpha^2$ **(Ισοσκελής υπερβολή**

Κοινές ιδιότητες

↦ Οι εστίες Ε΄, Ε της υπερβολής είναι <u>πάντα</u> στην ευθεία Α΄Α

↦ Η υπερβολή έχει **άξονες συμμετρίας** τους **χ΄χ** και **y΄y** και **κέντρο συμμετρίας** την αρχή **Ο(0,0)** των αξόνων

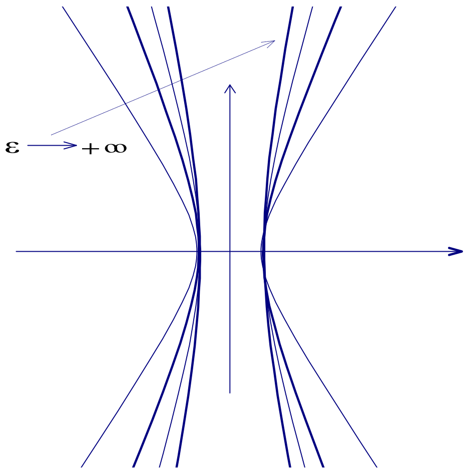
↦ Το **Ο** λέγεται **κέντρο της υπερβολής** και τα **Α΄ , Α** λέγονται **κορυφές της υπερβολής**

↦ Η υπερβολή αποτελείται από **δύο χωριστούς κλάδους**

2.Εκκεντρότητα υπερβολής

- **Εκκεντρότητα ε** της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$

λέγεται ο λόγος: $\boxed{\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}}$



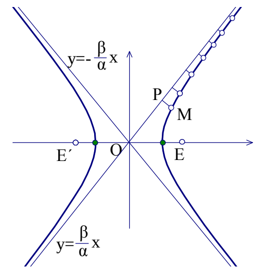
- Είναι $\varepsilon>1$ (αφού $\gamma>\alpha$)

  δηλαδή: η εκκεντρότητα της υπερβολής είναι μεγαλύτερη της μονάδος

- Είναι $\frac{\beta}{\alpha}=\sqrt{\varepsilon^2-1}$ δηλαδή:

ο λόγος των διαστάσεων του ορθογωνίου βάσης της υπερβολής είναι συνάρτηση της εκκεντρότητας

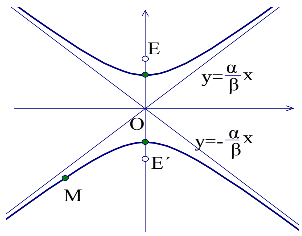
3. Ασύμπτωτες υπερβολής



- Η υπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$

έχει **ασύμπτωτες** τις ευθείες:

$\boxed{y=\frac{\beta}{\alpha}x \quad \text{και} \quad y=-\frac{\beta}{\alpha}x}$



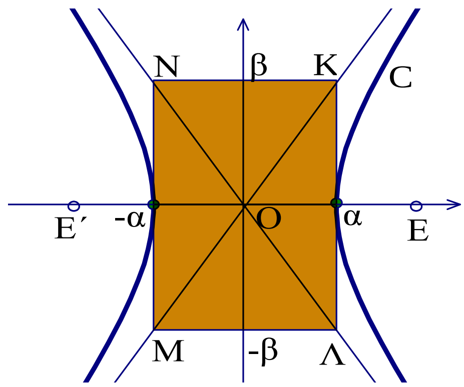
- Η υπερβολή $\frac{y^2}{\alpha^2}-\frac{x^2}{\beta^2}=1$

έχει **ασύμπτωτες** τις ευθείες:

$\boxed{y=\frac{\alpha}{\beta}x \quad \text{και} \quad y=-\frac{\alpha}{\beta}x}$

4. Το ορθογώνιο βάσης της υπερβολής

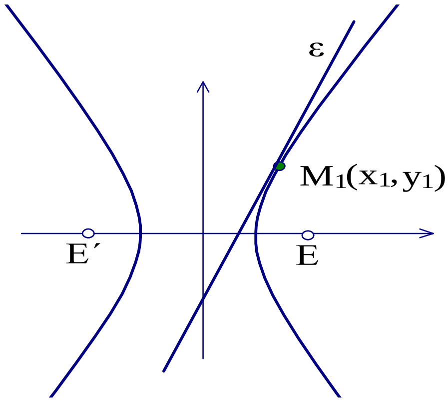
$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$$



Οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι οι διαγώνιοι του ορθογωνίου ΚΛΜΝ με κορυφές τα σημεία Κ(α,β) , Λ(α,-β) , Μ(-α,-β) , Ν(-α,β)

Το ορθογώνιο ΚΛΜΝ μπορεί να θεωρηθεί ως <u>βάση</u> για την σχεδίαση μιας υπερβολής

5. Εφαπτόμενη Υπερβολής:



Η εφαπτομένη ε στο σημείο $M_1(x_1,y_1)$ της υπερβολής:

- $\dfrac{x^2}{\alpha^2}-\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$ **έχει εξίσωση** $\boxed{\dfrac{xx_1}{\alpha^2}-\dfrac{yy_1}{\beta^2}=1}$

$\mapsto$ $\beta^2x^2-\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2$ ›› $\beta^2xx_1-\alpha^2yy_1=\alpha^2\beta^2$

- $\dfrac{y^2}{\alpha^2}-\dfrac{x^2}{\beta^2}=1$ **έχει εξίσωση** $\boxed{\dfrac{yy_1}{\alpha^2}-\dfrac{xx_1}{\beta^2}=1}$

$\mapsto$ $\beta^2y^2-\alpha^2x^2=\alpha^2\beta^2$ ›› $\beta^2yy_1-\alpha^2xx_1=\alpha^2\beta^2$

Εξίσωση - Εφαπτομένη Υπερβολής

Α. Εξίσωση Υπερβολής

Για να γράψουμε την εξίσωση μιας υπερβολής πρέπει να γνωρίζουμε ή να βρούμε:

- **τις παραμέτρους α και β , ($\beta=\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}$)**
- **τον άξονα (χ΄χ ή y΄y) που βρίσκονται οι εστίες**

Η θέση του α^2 στην υπερβολή εξαρτάται από τον άξονα (χ΄χ ή y΄y) που βρίσκονται οι εστίες (ή οι κορυφές της)

Β. Για να γράψουμε την εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής C

Για να γράψουμε την εξίσωση της εφαπτομένης της C:

- **Αν <u>γνωρίζουμε</u> το σημείο επαφής $A(x_1,y_1)$, η εξίσωση προκύπτει άμεσα από τους τύπους**
- **Αν <u>δεν γνωρίζουμε</u> το σημείο επαφής τότε το ονομάζου- με έστω $A(x_1,y_1)$, γράφουμε την εφαπτομένη στο Α**

οπότε:

i) Οι συντεταγμένες του Α επαληθεύουν την εξίσωση της υπερβολής

ii) Η εφαπτομένη ικανοποιεί την συνθήκη του ζητήματος

Γ. Ευθεία εφαπτομένη σε υπερβολής

- **Για να εφάπτεται η ευθεία ε στην υπερβολή C απαιτούμε η η εφαπτόμενη της υπερβολής σε ένα τυχαίο σημείο της ,να ταυτίζεται με την δοσμένη ευθεία.**
- **Αλλιώς για να εφάπτεται η ευθεία ε στην υπερβολή C πρέπει το σύστημα των εξισώσεών τους να έχει μία διπλή λύση**
  <u>Προσοχή όμως</u> !!!
  Στη δεύτερη πρέπει να επαληθεύσουμε το αποτέλεσμα ,δηλαδή :
  - **Βρίσκουμε τα σημεία ,από τη διπλή λύση του συστήματος**
  - **Βρίσκουμε τις εφαπτόμενες στα σημεία αυτά…**
  - **Επαληθεύουμε ότι μια από αυτές είναι η δοσμένη ευθεία…..**

ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

1	**Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με κέντρο Ο(0,0) και ακτίνα ρ έχει εξίσωση $x^2+y^2=\rho^2$. Ποιος κύκλος ονομάζεται μοναδιαίος;**

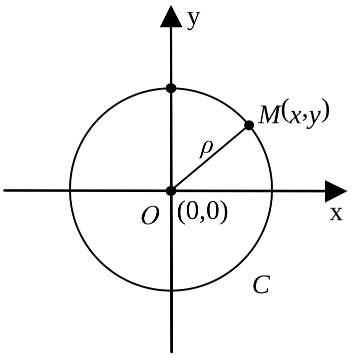
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και C ο κύκλος με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα ρ. Το σημείο $M(x,y)$ ανήκει στον κύκλο C, αν και μόνο αν απέχει από το κέντρο του O απόσταση ίση με ρ, δηλαδή, αν και μόνο αν ισχύει:

$$(OM)=\rho \qquad (1)$$

Όμως, $(OM)=\sqrt{x^2+y^2}$. Επομένως, η (1) γράφεται

$$\sqrt{x^2+y^2}=\rho \iff x^2+y^2=\rho^2. \qquad (2)$$



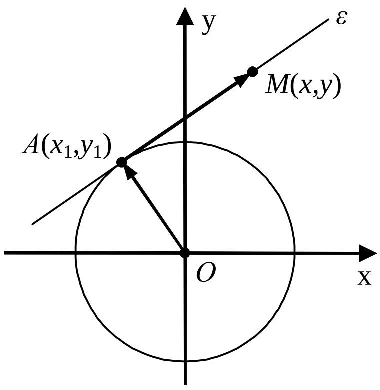
Παρατηρούμε, δηλαδή, ότι οι συντεταγμένες των σημείων του κύκλου και μόνο αυτές επαληθεύουν την εξίσωση (2). Άρα, ο κύκλος με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση $x^2+y^2=\rho^2$.

2	**Έστω ε η εφαπτομένη του κύκλου $x^2+y^2=\rho^2$ σε ένα σημείο του $A(x_1,y_1)$, να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη του κύκλου σε αυτό το σημείο έχει εξίσωση $xx_1+yy_1=\rho^2$.**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ε η εφαπτομένη του κύκλου $C: x^2+y^2=\rho^2$ σε ένα σημείο του $A(x_1,y_1)$. Έστω ένα δεύτερο σημείο $M(x,y)$

Είναι $\vec{OA}=(x_1,y_1)$ και $\vec{AM}=(x-x_1,y-y_1)$



Ισχύουν οι ισοδυναμίες

$M(x,y)\in\varepsilon \iff OA\perp AM \iff \vec{OA}\cdot\vec{AM}=0 \iff$

$\iff x_1(x-x_1)+y_1(y-y_1)=0 \iff$

$\iff xx_1+yy_1=\rho^2$, αφού $x_1^2+y_1^2=\rho^2$.

Επομένως, η εφαπτομένη του κύκλου $x^2+y^2=\rho^2$ στο σημείο του $A(x_1,y_1)$ έχει εξίσωση $xx_1+yy_1=\rho^2$

3	**1. Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με κέντρο $K(x_o, y_o)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση: $(x-x_o)^2+(y-y_o)^2=\rho^2$**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

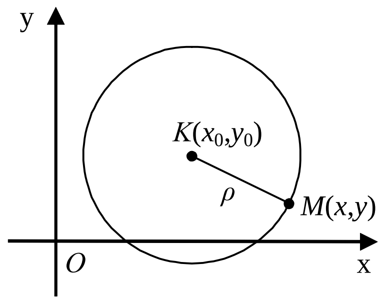
Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και C ο κύκλος με κέντρο $K(x_0,y_0)$ και ακτίνα ρ. Ένα σημείο $M(x,y)$ ανήκει στον κύκλο C, αν και μόνο αν ισχύει :

$$(KM)=\rho \qquad (1)$$

Όμως, $(KM)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$.

Επομένως, η σχέση (1) γράφεται:

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=\rho \Leftrightarrow \quad (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2$$



4	**Να αποδείξετε ότι κάθε κύκλος έχει εξίσωση της μορφής $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θεωρούμε τον κύκλο με κέντρο $K(x_0,y_0)$ και ακτίνα ρ, ο κύκλος αυτός έχει εξίσωση

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2$$

Κάνοντας πράξη στην παραπάνω εξίσωση του κύκλου έχουμε :

$$x^2-2xx_o+x_o^2+y^2-2yy_o+y_o^2=\rho^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2+y^2-2x_0x-2y_0y+(x_0^2+y_0^2-\rho^2)=0$$

δηλαδή παίρνει τη μορφή $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$

όπου $A=-2x_0$, $B=-2y_0$ και $\Gamma=x_0^2+y_0^2-\rho^2$.

5	**Να αποδείξετε ότι κάθε εξίσωση της μορφής: $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ με $A^2+B^2-4\Gamma>0$ παριστάνει κύκλο του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα του.**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Κάθε εξίσωση της μορφής $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ **(1)** γράφεται διαδοχικά:

$$x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0 \Leftrightarrow$$
$$(x^2+Ax)+(y^2+By)=-\Gamma \Leftrightarrow$$

$$\left(x^2+2\frac{A}{2}x+\frac{A^2}{4}\right)+\left(y^2+2\frac{B}{2}y+\frac{B^2}{4}\right)=-\Gamma+\frac{A^2}{4}+\frac{B^2}{4} \Leftrightarrow$$

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2=\frac{A^2+B^2-4\Gamma}{4}.$$

Επομένως:

- Αν $A^2+B^2-4\Gamma>0$, η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}$.
- Αν $A^2+B^2-4\Gamma=0$, η εξίσωση (1) παριστάνει ένα μόνο σημείο, το $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$.
- Αν $A^2+B^2-4\Gamma<0$, η εξίσωση (1) είναι αδύνατη, δηλαδή δεν υπάρχουν σημεία $M(x,y)$ των οποίων οι συντεταγμένες να την επαληθεύουν.

6	**Τι ονομάζεται εκκεντρότητα της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$. Να αποδείξετε ότι για την εκκεντρότητα ε της έλλειψης ισχύει η σχέση: $\frac{\beta}{\alpha}=\sqrt{1-\varepsilon^2}$**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Εκκεντρότητα ε της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ ονομάζουμε, το λόγο $\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}<1$

Επειδή $\gamma=\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$ έχουμε:

$$\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\alpha}\Leftrightarrow\varepsilon^2=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2}=1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2\Leftrightarrow\varepsilon^2=1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \text{ και άρα } \frac{\beta}{\alpha}=\sqrt{1-\varepsilon^2}.$$

7	**Τι ονομάζεται εκκεντρότητα υπερβολής;. Να αποδείξετε ότι για την εκκεντρότητα ε μιας υπερβολής ισχύει η σχέση $\frac{\beta}{\alpha}=\sqrt{\varepsilon^2-1}$**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Εκκεντρότητα *ε* της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$, ονομάζεται ο λόγος $\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}>1$.

Επειδή $\gamma=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, για την εκκεντρότητα ε έχουμε:

$$\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\alpha}\Rightarrow\varepsilon^2=1+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \text{ άρα } \frac{\beta}{\alpha}=\sqrt{\varepsilon^2-1}.$$

8	**Πότε μια υπερβολή ονομάζεται ισοσκελής; Να αποδείξετε ότι στην ισοσκελή υπερβολή η εκκεντρότητά της είναι ε = $\sqrt{2}$**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω η υπερβολή *C* με εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$,

Ισοσκελής ονομάζεται η υπερβολή για την οποία ισχύει α = β και αυτή έχει εξίσωση

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1\Rightarrow\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\alpha^2}=1\Rightarrow x^2-y^2=a^2$$

Στην ισοσκελή υπερβολή η εκκεντρότητα είναι ίση με

$$\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\sqrt{\alpha^2+\alpha^2}}{\alpha}=\frac{\sqrt{2\alpha^2}}{\alpha}=\frac{\alpha\sqrt{2}}{\alpha}=\sqrt{2}$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Κύκλος

1. Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση $x^2 + y^2 = \rho^2$
2. Να αποδείξετε ότι η εφαπτόμενη του κύκλου C : $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1,y_1)$ έχει εξίσωση : $xx_1+yy_1=\rho^2$
3. Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με κέντρο $K(x_0,y_0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση

$$\left(x-x_0\right)^2 + \left(y-y_0\right)^2 = \rho^2$$

4. Να αποδείξετε ότι κάθε κύκλος έχει εξίσωση της μορφής

$$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0 \text{ με } A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0 \text{ (I)}$$

και αντιστρόφως κάθε εξίσωση της μορφής (I) παριστάνει κύκλο κέντρου $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$ και ακτινας $\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}$.

Παραβολή

5. Τι ονομάζεται παραβολή με εστία το σημείο Ε και διευθετούσα την ευθεία δ που δεν διέρχεται από το Ε ;
6. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της παραβολής με εστια $E(\frac{p}{2},0)$ και διευθετούσα $(\delta) : x = -\frac{p}{2}$ έχει εξίσωση $y^2=2px$
7. Να αποδείξετε ότι ο άξονας $x'x$ είναι άξονας συμμετρίας της παραβολής $y^2=2px$
8. Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $y^2=2px$ στο σημείο της $A(x_1,y_1)$.
9. Ποια ιδιότητα της παραβολής ονομάζεται ανακλαστική ιδιότητα ;

Έλλειψη

10. Τι ονομάζεται έλλειψη με εστίες τα σημεία E' και E ;
11 . Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της έλλειψης με εστίες Ε(γ,0) και Ε΄(-γ,0) και μήκος μεγάλου άξονα 2α είναι : $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, $\beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}$
12 . Να αποδείξετε ότι οι άξονες xx΄ , yy΄ είναι άξονες συμμετρίας και η αρχή Ο των αξόνων κέντρο συμμετρίας της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, $\beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}$
13 .Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, $\beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}$ στο σημείο της $M(x_1,y_1)$.
14 .Τι ονομάζουμε εκκεντρότητα (ε) έλλειψης ;Δείξτε ότι
   - $0 < \varepsilon < 1$
   - $\frac{\beta}{\alpha}=\sqrt{1-\varepsilon^2}$
15. Πότε δύο ελλείψεις λέμε ότι είναι όμοιες ;
16 . Ποια ιδιότητα της έλλειψης ονομάζεται ανακλαστική ιδιότητα ;
17. Τι ονομάζουμε διάμετρο έλλειψης και ποια η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της ;
18. Θεωρούμε την έλλειψη : $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, $\beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}$.Δείξτε ότι $-\alpha \le x \le \alpha$, $-\beta \le y \le \beta$

Υπερβολή

19 . Τι ονομάζεται υπερβολή με εστίες τα σημεία E' και E ;

20 . Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της υπερβολής με εστίες Ε(γ,0) και Ε΄(-γ,0) και απόλυτη διαφορά 2α είναι $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1 \quad , \quad \beta=\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}$

21 . Να αποδείξετε ότι οι άξονες xx΄ , yy΄ είναι άξονες συμμετρίας και η αρχή Ο των αξόνων κέντρο συμμετρίας της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1 \quad , \quad \beta=\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}$

22. Θεωρούμε την υπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1 \quad , \quad \beta=\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}$. Δείξτε ότι $|x| \geq \alpha$

23 .Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1 \quad , \quad \beta=\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}$ στο σημείο της $M(x_1,y_1)$.

24. Τι λέγεται ορθογώνιο βάσης υπερβολής;

25. Τι ονομάζουμε εκκεντρότητα (ε) υπερβολής ; Δείξτε ότι :

$1 < \varepsilon$ και $\frac{\beta}{\alpha}=\sqrt{\varepsilon^2-1}$

26 . Να γράψετε τις εξισώσεις των ασυμπτώτων της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1 \quad , \quad \beta=\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}$.

27.Ποια υπερβολή ονομάζεται ισοσκελής ;
Τι γνωρίζετε για την εκκεντρότητα μιας ισοσκελούς υπερβολής ;

28. Ποια ιδιότητα της υπερβολής ονομάζεται ανακλαστική ιδιότητα ;

Ερωτήσεις αξιολόγησης

29. Οι κύκλοι $x^2 + y^2 + 2x + 3y - 1 = 0$ και $x^2 + y^2 + 2x + 3y + \sqrt{2} = 0$ είναι ομόκεντροι. **Σ** **Λ**

30.Τα σημεία (- 2, 2) και (4, 2) του κύκλου $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$ είναι αντιδιαμετρικά. **Σ** **Λ**

31. Ένας κύκλος έχει το κέντρο του στην ευθεία y = x. Έχει πάντα εξίσωση $(x - \alpha)^2 + (y - \alpha)^2 = \alpha^2$. **Σ** **Λ**

32.Ένα σημείο (x_1, y_1) είναι εσωτερικό ενός κύκλου με κέντρο Κ (x_0, y_0) και ακτίνα ρ. Ισχύει: $(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 < \rho^2$. **Σ** **Λ**

33. Ο κύκλος $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ και η παραβολή $y^2 = - 2x$ εφάπτονται. **Σ** **Λ**

34. Η εξίσωση $\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{5}y^2 = \frac{3}{2}$ παριστάνει έλλειψη. **Σ** **Λ**

35. Η εξίσωση μιας υπερβολής είναι $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$. Ισχύει πάντα α > β. **Σ** **Λ**

36. Η υπερβολή C: $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ τέμνει τον άξονα y΄y σε δύο σημεία. **Σ** **Λ**

2 ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ……… ΓΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^0^ Β

Αν $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=3$, $|\vec{\gamma}|=1$ **και** $2\vec{\alpha}-\vec{\beta}+3\vec{\gamma}=\vec{0}$ **(1), να υπολογίσετε το** $A=2\vec{\alpha}\vec{\beta}+4\vec{\beta}\vec{\gamma}-\vec{\alpha}\vec{\gamma}$**.**

ΛΥΣΗ

(1) $\Leftrightarrow \vec{\alpha}=\frac{1}{2}\vec{\beta}-\frac{3}{2}\vec{\gamma}$ οπότε: $\vec{\alpha}^2=\frac{1}{4}\vec{\beta}^2+\frac{9}{4}\vec{\gamma}^2-\frac{3}{2}\vec{\beta}\vec{\gamma}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\vec{\alpha}^2=\vec{\beta}^2+9\vec{\gamma}^2-6\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}\Rightarrow \vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=\frac{1}{6}\vec{\beta}^2+\frac{9}{6}\vec{\gamma}^2-\frac{4}{6}\vec{\alpha}^2\Rightarrow$

$\Leftrightarrow \vec{\beta}\vec{\gamma}=\frac{1}{6}\cdot 9+\frac{9}{6}\cdot 1-\frac{4}{6}\cdot 4=\frac{9}{6}+\frac{9}{6}-\frac{16}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ (2)

(1) $\Leftrightarrow \vec{\beta}=2\vec{\alpha}+3\vec{\gamma}$ οπότε: $\vec{\beta}^2=4\vec{\alpha}^2+9\vec{\gamma}^2+12\vec{\alpha}\vec{\gamma}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \vec{\alpha}\vec{\gamma}=\frac{1}{12}\vec{\beta}^2-\frac{4}{12}\vec{\alpha}^2-\frac{9}{12}\vec{\gamma}^2=\frac{1}{12}\cdot 9-\frac{4}{12}\cdot 4-\frac{9}{12}\cdot 1=-\frac{16}{12}=-\frac{4}{3}$ (3)

(1) $\Leftrightarrow \vec{\gamma}=\frac{1}{3}\vec{\beta}-\frac{2}{3}\vec{\alpha}$ οπότε: $\vec{\gamma}^2=\frac{1}{9}\vec{\beta}^2+\frac{4}{9}\vec{\alpha}^2-\frac{4}{9}\vec{\alpha}\vec{\beta}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \vec{\alpha}\vec{\beta}=\frac{1}{4}\vec{\beta}^2+\vec{\alpha}^2-\frac{9}{4}\vec{\gamma}^2=\frac{1}{4}\cdot 9+4-\frac{9}{4}=4$ (4)

Και από τις (2), (3), (4) έχουμε:

$$A=2\cdot 4+4\cdot\frac{1}{3}+\frac{4}{3}=8+\frac{8}{3}=\frac{32}{3}$$

ΘΕΜΑ 2^0^ Γ

Αν $\vec{\alpha}\neq\vec{0}=\vec{\beta}$ **και** $\vec{\alpha}\neq\vec{\beta}$**, να δείξετε ότι για κάθε** $\lambda,\mu\in\Re$ **ισχύει**

$$\lambda^2\vec{\alpha}^2+2\lambda\mu\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)+\mu^2\vec{\beta}^2\geq 0$$

Πότε η σχέση ισχύει ως ισότητα;

ΛΥΣΗ

Αν το πρώτο μέλος της σχέσης θεωρηθεί ως τριώνυμο με μεταβλητή λ ή μ (δεν διαφέρει η σκέψη), τότε

$$\vec{\alpha}^2\lambda^2+2\mu\left(\vec{\alpha}\vec{\beta}\right)\lambda+\mu^2\vec{\beta}^2\geq 0.$$

Είναι: $\Delta=\left(2\mu\left(\vec{\alpha}\vec{\beta}\right)\right)^2-4\cdot\vec{\alpha}^2\mu^2\vec{\beta}^2=4\mu^2\left(\left(\vec{\alpha}\vec{\beta}\right)^2-\vec{\alpha}^2\vec{\beta}^2\right)=$

$$= 4\mu^2\left[\left(\left|\vec{\alpha}\right|\cdot\left|\vec{\beta}\right|\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)\right)^2 - \left|\vec{\alpha}\right|^2\cdot\left|\vec{\beta}\right|^2\right] = 4\mu^2\cdot\left|\vec{\alpha}\right|^2\cdot\left|\vec{\beta}\right|^2\cdot\left[\sigma\upsilon\nu^2\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right) - 1\right] < 0$$

διότι $\vec{\alpha} \neq \vec{\beta}$, οπότε $\sigma\upsilon\nu\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right) \neq \pm 1$.

Τότε το τριώνυμο έχει για κάθε $\lambda \in \Re$ το πρόσημο του λ^2, είναι επομένως θετικό. Η σχέση ισχύει ως ισότητα μόνο για $\lambda = \mu = 0$.

ΘΕΜΑ 3^0 B

Για τυχαία διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ να δείξετε ότι:

i) $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|^2 + \left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|^2 = 2\left|\vec{\alpha}\right|^2 + 2\left|\vec{\beta}\right|^2$,

ii) $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|^2 - \left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|^2 = 4\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$.

ΛΥΣΗ

i)

$$\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|^2 + \left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|^2 = \left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)^2 + \left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)^2 = \vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 + 2\vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 - 2\vec{\alpha}\vec{\beta} =$$

$$= 2\vec{\alpha}^2 + 2\vec{\beta}^2 = 2\left|\vec{\alpha}\right|^2 + 2\left|\vec{\beta}\right|^2$$

ii) $$\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|^2 - \left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|^2 = \left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)^2 - \left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)^2 = \vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 + 2\vec{\alpha}\vec{\beta} - \vec{\alpha}^2 - \vec{\beta}^2 = 2\vec{\alpha}\vec{\beta} = 4\vec{\alpha}\vec{\beta}$$

ΘΕΜΑ 4^0 B

Δίνονται τα σημεία A(1, –3), B(4, 0). Να καθορισθούν συντεταγμένες σημείου Γ ώστε αυτό να ανήκει στην ευθεία AB.

ΛΥΣΗ

Έστω Γ(x, y) το ζητούμενο σημείο.

Γ ανήκει στην ευθεία AB $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{A\Gamma} \parallel \overrightarrow{AB}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{vmatrix} x_{\overrightarrow{A\Gamma}} & y_{\overrightarrow{A\Gamma}} \\ x_{\overrightarrow{AB}} & y_{\overrightarrow{AB}} \end{vmatrix} = 0$ **(1)**

Αλλά $x_{\overrightarrow{A\Gamma}} = x_\Gamma - x_A = x - 1$, $\quad y_{\overrightarrow{A\Gamma}} = y_\Gamma - y_A = y - (-3) = y + 3$

$x_{\overrightarrow{AB}} = x_B - x_A = 4 - 1 = 3$, $\quad y_{\overrightarrow{AB}} = y_B - y_A = 0 - (-3) = 3$

Η (1) $\Leftrightarrow$ $\begin{vmatrix} x-1 & y+3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$ $\Leftrightarrow$ $3(x-1) - 3(y+3) = 0$

$(x-1) - (y+3) = 0 \Leftrightarrow x - 1 - y - 3 = 0 \Leftrightarrow x = y + 4$ **(2)**

Για να έχουμε ένα συγκεκριμένο σημείο Γ, στη (2) θέτουμε μια τιμή στο y, ας είναι y = 1, οπότε x = 5.
Άρα το σημείο Γ(5, 1) είναι ζητούμενο.

ΘΕΜΑ 5^0 Α-Β

Σημειώστε Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) σε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις.

i. **Τα διανύσματα (3, –1), (–3, 1) είναι αντίθετα**

ii **Ισχύει** $\det(\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) = 0$

iii **Ισχύει** $\det(\vec{i}, \vec{j}) = 1$

iv **Αν η τεταγμένη του μη μηδενικού διανύσματος** $\vec{\alpha}$ **είναι ίση με το μισό του μέτρου του, τότε η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα** $x'x$ **είναι** $\frac{\pi}{6}$

v **Αν ο συντελεστής διεύθυνσης διανύσματος** $\vec{\alpha}$ **είναι** $\frac{3}{4}$ **τότε** $\vec{\alpha}$ **= (4, 3)**

ΛΥΣΗ

i → Σ $\quad (3, -1) = -(-3, 1)$

ii → Σ $\quad \vec{\alpha} \parallel \vec{\alpha}$

iii → Σ $\quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1$

iv → Λ $\quad$ Έστω $\vec{\alpha} = (x, y)$

$$|\vec{\alpha}| = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow |\vec{\alpha}|^2 = x^2 + y^2$$

$$|\vec{\alpha}|^2 = x^2 + \left(\frac{|\vec{\alpha}|}{2}\right)^2$$

$$|\vec{\alpha}|^2 = x^2 + \frac{|\vec{\alpha}|^2}{4}$$

$$x^2 = \frac{3}{4}|\vec{\alpha}|^2$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}|\vec{\alpha}| \quad \text{ή} \quad x = -\frac{\sqrt{3}}{2}|\vec{\alpha}|$$

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{y}{x} = \ .\ .\ .\ .\ . = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{δύο τιμές}$$

v → Λ $\quad$ Μπορεί να είναι $\vec{\alpha} = ((4\kappa, 3\kappa)$ με $\kappa \in$ □

ΘΕΜΑ 6^0 Δ

Αν $\vec{\alpha} = (-1, 3)$, $\vec{\beta} = (0, 4)$ **και** $\vec{\gamma} = (3, 1)$, **να εκφράσετε το** $\vec{\alpha}$ **σαν γραμμικό συνδυασμό των** $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$.

ΛΥΣΗ

Έστω $\vec{\alpha} = \kappa\vec{\beta} + \lambda\vec{\gamma}$ **(1)**

$\vec{\alpha} = \kappa\vec{\beta} + \lambda\vec{\gamma} \Leftrightarrow (-1, 3) = \kappa(0, 4) + \lambda(3, 1) \Leftrightarrow (-1, 3) = (0, 4\kappa) + (3\lambda, \lambda)$

$(-1, 3) = (0 + 3\lambda, 4\kappa + \lambda) \Leftrightarrow -1 = 3\lambda$ και $3 = 4\kappa + \lambda \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{3}$ και $3 = 4\kappa - \frac{1}{3} \Leftrightarrow$

$\lambda = -\frac{1}{3}$ και $\frac{5}{6} = \kappa$ οπότε η (1) γίνεται $\vec{\alpha} = \frac{5}{6}\vec{\beta} - \frac{1}{3}\vec{\gamma}$

ΘΕΜΑ 7^0 Β

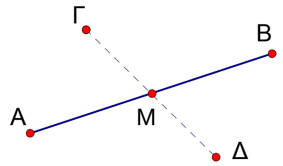
Δίνονται τα σημεία A(1, 4), B(-1, 6), Γ(7, 0). Να βρείτε τις συντεταγμένες του συμμετρικού του σημείου Γ, ως προς κέντρο συμμετρίας το μέσο του τμήματος AB.

ΛΥΣΗ

Έστω M το μέσο του τμήματος AB.

Τότε $x_M = \dfrac{1-1}{2} = 0$ και $y_M = \dfrac{4+6}{2} = 5.$

Έστω Δ το συμμετρικό του Γ ως προς κέντρο συμμετρίας το M.



Το M θα είναι μέσο του τμήματος ΓΔ, οπότε

$$x_M = \frac{x_\Gamma + x_\Delta}{2} \quad \text{και} \quad y_M = \frac{y_\Gamma + y_\Delta}{2} = 5 \quad \Rightarrow$$

$$0 = \frac{7 + x_\Delta}{2} \quad \text{και} \quad 5 = \frac{0 + y_\Delta}{2} \quad \Rightarrow \quad x_\Delta = -7 \quad \text{και} \quad y_\Delta = 10$$

ΘΕΜΑ 8^0 Β

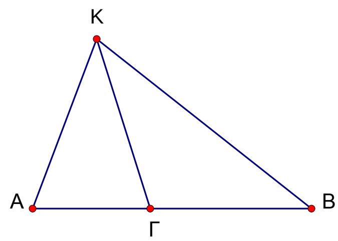
Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{KA} = (2, 5)$, $\overrightarrow{KB} = (-1, 3)$ και για το σημείο Γ δίνεται ότι $\overrightarrow{A\Gamma} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\Gamma B}$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{K\Gamma}$.

ΛΥΣΗ

$\overrightarrow{A\Gamma} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{\Gamma B} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{A\Gamma} // \overrightarrow{\Gamma B}$

$\Rightarrow$ τα A, Γ, B είναι συνευθειακά

και $\overrightarrow{A\Gamma} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB}$



$$\overrightarrow{A\Gamma} = \frac{2}{5}(\overrightarrow{KB} - \overrightarrow{KA}) = \frac{2}{5}[(-1, 3) - (2, 5)]$$

$$= \frac{2}{5}(-1-2,\ 3-5) = \frac{2}{5}(-3,\ -2) = \left(-\frac{6}{5},\ -\frac{4}{5}\right)$$

$$\overrightarrow{K\Gamma} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{A\Gamma} = (2, 5) + \left(-\frac{6}{5},\ -\frac{4}{5}\right) = \left(2-\frac{6}{5},\ 5-\frac{4}{5}\right) = \left(\frac{4}{5},\ \frac{21}{5}\right)$$

ΘΕΜΑ 9^0 Γ

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1,\ 2)$, $\vec{\beta} = (0,\ -1)$ και $\vec{\gamma} = (-2,\ 0)$.

Να υπολογίσετε τα

i) $(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\cdot\vec{\gamma}$, $\quad (\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma})\,\vec{\alpha}$, $\quad (3\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma})2\vec{\alpha}$

ii) $|\vec{\alpha}||\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}|$, $\quad |(\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma})\vec{\beta}|$, $\quad |\vec{\gamma}|\cdot(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})$, $\quad |\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}|\cdot\vec{\gamma}$

ΛΥΣΗ

i)

- $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = (1,\ 2)\cdot(0,\ -1) = 1\cdot 0 + 2\cdot(-1) = -2$

  Οπότε $(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\vec{\gamma} = -2(-2,\ 0) = (4, 0)$

- $\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma} = (0,\ -1)\cdot(-2,\ 0) = 0\cdot(-2) + (-1)\cdot 0 = 0$

  Οπότε $(\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma})\,\vec{\alpha} = 0.(1,\ 2) = (0,\ 0) = \vec{0}$

- $(3\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma})2\vec{\alpha} \;=\; 3.2\,[\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma})] \;=\; 6\cdot\vec{0} \;=\; \vec{0}$

ii)

- $|\vec{\alpha}| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$ **και** $\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma} = 0 \;\Rightarrow\; |\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}| = 0$

  Άρα $|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}| = \sqrt{5}\cdot 0 = 0$

- $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma} = \mathbf{(1,2)\cdot(-2,0) \;=\; 1.(-2) + 2.0 \;=\; -2}$

  $(\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma})\vec{\beta} \;=\; \mathbf{-2}\vec{\beta} \;=\; \mathbf{-2(0,\; -1) \;=\; (0,\; 2)}$

  Άρα $|(\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma})\vec{\beta}| \;=\; \sqrt{0^2+2^2} \;=\; 2$

- $|\vec{\gamma}| \;=\; \sqrt{(-2)^2+0^2} \;=\; 2$ **και αφού** $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = -2$, **θα έχουμε**

  $|\vec{\gamma}|\cdot(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}) \;=\; \mathbf{2.(-2) \;=\; -4}$

- $|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}|\cdot\vec{\gamma} \;=\; |-2|\cdot\mathbf{(-2,\; 0) \;=\; 2\,(-2,\; 0) \;=\; (-4,\; 0)}$

ΘΕΜΑ 10^0 Γ

Αν $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$, $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = \dfrac{\pi}{3}$ **και** $\vec{\kappa} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$, $\vec{\nu} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$

i) Να βρείτε τα $|\vec{\kappa}|$ και $|\vec{\nu}|$

ii) Να βρείτε το $\vec{\kappa}\cdot\vec{\nu}$

iii) Να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{\kappa}$ και $\vec{\nu}$

ΛΥΣΗ

i) $|\vec{\kappa}|^2 = |2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}|^2 = (2\vec{\alpha}+3\vec{\beta})^2$

$$= 4\vec{\alpha}^2 + 12\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + 9\vec{\beta}^2$$

$$= 4|\vec{\alpha}|^2 + 12|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} + 9|\vec{\beta}|^2$$

$$= 4 + 12\cdot 1\cdot 2\cdot\frac{1}{2} + 9\cdot 4 = \mathbf{52}$$

Οπότε : $|\vec{\kappa}| = \sqrt{52} \;=\; 2\sqrt{13}$

Ομοίως βρίσκουμε $|\vec{\nu}| = \sqrt{13}$

ii) $\vec{\kappa}\cdot\vec{\nu} = (2\vec{\alpha}+3\vec{\beta})(\vec{\alpha}-2\vec{\beta}) = 2\vec{\alpha}^2 - \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} - 6\vec{\beta}^2 =$ **πράξεις** $= \mathbf{-21}$

iii) $\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\kappa},\vec{\nu}}) \;=\; \dfrac{\vec{\kappa}\cdot\vec{\nu}}{|\vec{\kappa}|\cdot|\vec{\nu}|} \;=\; \dfrac{-21}{2\sqrt{13}\cdot\sqrt{13}} \;=\; -\dfrac{21}{26}$

ΘΕΜΑ 11^0 Γ

Αν $|\vec{\alpha}| = 2,\quad |\vec{\beta}| = 3$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = 60^0$, **να βρείτε το** $x \in \mathbb{R}$ **στις παρακάτω περιπτώσεις**

i) $(2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - x\vec{\beta}) = -2$

ii) $((2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} - x\vec{\beta})$

ΛΥΣΗ

i) $(2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - x\vec{\beta}) = -2 \quad \Leftrightarrow \quad 2\vec{\alpha}^2 + (3-2x)(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}) - 3x\vec{\beta}^2 = -2$

$$2|\vec{\alpha}|^2 + (3-2x)|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) - 3x|\vec{\beta}|^2 = -2$$

$$2.2^2 + (3-2x)2.\ 3\sigma\upsilon\nu 60^0 - 3x3^2 = -2$$

$$8 + (3-2x).3 - 27x = -2$$

$$\mathbf{8 + 9 - 6x - 27x = -2}$$

$$\mathbf{33x = 19} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = \frac{19}{33}$$

ii) $(2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} - x\vec{\beta}) \quad \Leftrightarrow \quad (2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - x\vec{\beta}) = \mathbf{0}$

$$2\vec{\alpha}^2 - 2x(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}) + 3(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}) - 3x\vec{\beta}^2 = 0$$

$$2.\ 2^2 - 2x(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}) + 3(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}) - 3x.\ 3^2 = 0$$

$$8 - 2x.3 + 3.3 - 3x.\ 9 = 0$$

$$\mathbf{-33x = -17} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = \frac{17}{33}$$

ΘΕΜΑ 12^0 Γ-Δ

Αν $|\vec{\alpha}| = 2,\quad |\vec{\beta}| = \sqrt{2},\quad |\vec{\gamma}| = \frac{1}{2}$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = (\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}}) = \frac{\pi}{4}$ **με** $\vec{\alpha},\ \vec{\gamma}$ **μη συγγραμμικά , να βρείτε το μέτρο του διανύσματος** $\vec{v} = 2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} + \vec{\gamma}$

ΛΥΣΗ

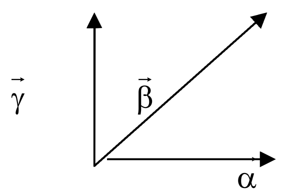
$$|\vec{v}|^2 = |2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} + \vec{\gamma}|^2 = (2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} + \vec{\gamma})^2$$

$$= 4\vec{\alpha}^2 + 9\vec{\beta}^2 + \vec{\gamma}^2 - 12(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}) + 4(\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}) - 6(\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}) \quad (1)$$

Αλλά $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \mathbf{2.}\ \sqrt{2}\ \mathbf{.}\ \frac{\sqrt{2}}{2} = \mathbf{2}$

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma} = \mathbf{2\ .}\ \frac{1}{2}\ \mathbf{\sigma\upsilon\nu 90^o = 0}$

$\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma} = \sqrt{2}\ .\ \frac{1}{2}\ .\ \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$



(1) $\Rightarrow \quad |\vec{v}|^2 = 4.\ 2^2 + 9.\ \sqrt{2}^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 12.\ 2 + 4.\ 0 - 6.\ \frac{1}{2}$

$$= \mathbf{16 + 18 +} \frac{1}{4} \mathbf{- 24 - 3} = \frac{29}{4} \quad \Rightarrow \quad |\vec{v}| = \frac{\sqrt{29}}{2}$$

ΘΕΜΑ 13^0 **Γ-Δ**

Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha},\ \vec{\beta}$ έχουν μέτρο ίσο με 1 και τα διανύσματα $\vec{\kappa}=\vec{\alpha}+2\vec{\beta},\ \ \vec{\nu}=5\vec{\alpha}-4\vec{\beta}$ είναι κάθετα, να βρείτε την γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha},\ \vec{\beta}$

ΛΥΣΗ

$\vec{\kappa}\perp\vec{\nu} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\kappa}\cdot\vec{\nu}=0$

$$(\vec{\alpha}+2\vec{\beta})(5\vec{\alpha}-4\vec{\beta})=0$$

$$5\vec{\alpha}^2+6(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})-8\vec{\beta}^2=0$$

$$5|\vec{\alpha}|^2+6|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})-8|\vec{\beta}|^2=0$$

$$5.1+6\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})-8.1=0$$

$$6\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=3$$

$$\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad (\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=60^o$$

ΘΕΜΑ 14^0 **Δ**

Δίνονται τα κάθετα και μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, έτσι ώστε $|\vec{\alpha}|=2|\vec{\beta}|$
Να βρείτε, ως συνάρτηση των $\vec{\alpha},\ \vec{\beta}$, τα διανύσματα $\vec{x}$ και $\vec{\psi}$ έτσι, ώστε να είναι $\vec{x}\parallel(\vec{\alpha}-3\vec{\beta})$ και $\vec{\psi}\perp(\vec{\alpha}-\vec{\beta})$ και $\vec{x}-\vec{\psi}=\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$

ΛΥΣΗ

$\vec{x}\parallel(\vec{\alpha}-3\vec{\beta}) \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x}=\lambda(\vec{\alpha}-3\vec{\beta})$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$

$\vec{x}=\lambda\vec{\alpha}-3\lambda\vec{\beta}\ \vec{x}$ **(1)**

$\vec{x}-\vec{\psi}=\vec{\alpha}-2\vec{\beta} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda\vec{\alpha}-3\lambda\vec{\beta}-\vec{\psi}=\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$

$\vec{\psi}=\lambda\vec{\alpha}-3\lambda\vec{\beta}-\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$. **(2)**

$\vec{\psi}\perp(\vec{\alpha}-\vec{\beta}) \overset{(2)}{\Leftrightarrow} (\lambda\vec{\alpha}-3\lambda\vec{\beta}-\vec{\alpha}+2\vec{\beta})(\vec{\alpha}-\vec{\beta})=0$

$\lambda\vec{\alpha}^2-\lambda(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})-3\lambda(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})+3\lambda\vec{\beta}^2-\vec{\alpha}^2+\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+2(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})-2\vec{\beta}^2=0$ **(3)**

Από υπόθεση έχουμε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$ και $|\vec{\alpha}|=2|\vec{\beta}| \Rightarrow \vec{\alpha}^2=4\vec{\beta}^2$.

Επομένως η (3) $\Leftrightarrow$ $4\lambda\vec{\beta}^2+3\lambda\vec{\beta}^2-4\vec{\beta}^2-2\vec{\beta}^2=0 \Leftrightarrow 7\lambda\vec{\beta}^2-6\vec{\beta}^2=0 \Leftrightarrow (7\lambda-6)\vec{\beta}^2=0$ και αφού $\vec{\beta}\neq\vec{0}$, θα είναι $7\lambda-6=0 \Leftrightarrow \lambda=\dfrac{6}{7}$

Οπότε η υπόθεση $\vec{x}=\lambda(\vec{\alpha}-3\vec{\beta}) \Leftrightarrow \vec{x}=\dfrac{6}{7}(\vec{\alpha}-3\vec{\beta})$

και η (2) $\Leftrightarrow$ $\vec{\psi}=\dfrac{6}{7}\vec{\alpha}-\dfrac{18}{7}\vec{\beta}-\vec{\alpha}+2\vec{\beta}=-\dfrac{1}{7}\vec{\alpha}-\dfrac{4}{7}\vec{\beta}$

ΘΕΜΑ 15^0 **Δ**

Αν είναι $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$ **,** $(\vec{\alpha}\,\hat{,}\,\vec{\beta}) = 60^o$ **,** $|\vec{\nu}| = 3$ και $(\vec{\nu}\,\hat{,}\,\vec{\alpha}) = 60^0$

να αναλύσετε το $\vec{\nu}$ **σε δύο συνιστώσες παράλληλες προς τα** $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$

ΛΥΣΗ

Έστω $\vec{\nu} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}$ **(1)** $\Rightarrow$ $\vec{\alpha}.\vec{\nu} = \vec{\alpha}(\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta})$

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\nu} = \lambda\vec{\alpha}^2 + \mu(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})$$

$$|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\nu}|\cdot\sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha}\,\hat{,}\,\vec{\nu}) = \lambda|\vec{\alpha}|^2 + \mu|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha}\,\hat{,}\,\vec{\beta})$$

$$1.3.\sigma\upsilon\nu 60^0 = \lambda.1 + \mu.1.1\cdot\sigma\upsilon\nu 60^0$$

$$3.\frac{1}{2} = \lambda + \mu.\frac{1}{2}$$

$$3 = 2\lambda + \mu \quad \textbf{(2)}$$

$\vec{\nu} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}$ $\Rightarrow$ $\vec{\beta}.\vec{\nu} = \vec{\beta}(\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta})$

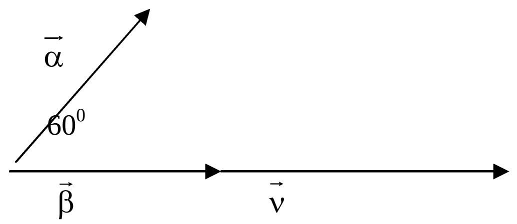
$$\vec{\beta}\cdot\vec{\nu} = \lambda(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}) + \mu\vec{\beta}^2$$

$$|\vec{\beta}|\cdot|\vec{\nu}|\cdot\sigma\upsilon\nu(\vec{\beta}\,\hat{,}\,\vec{\nu}) = \lambda|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\cdot\sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha}\,\hat{,}\,\vec{\beta}) + \mu|\vec{\beta}|^2$$

$$1.3.\sigma\upsilon\nu(\vec{\beta}\,\hat{,}\,\vec{\nu}) = \lambda.1.\sigma\upsilon\nu 60^0 + \mu.1$$

$$3\sigma\upsilon\nu(\vec{\beta}\,\hat{,}\,\vec{\nu}) = \lambda\cdot\frac{1}{2} + \mu \quad \textbf{(3)}$$

- Όταν η γωνία των $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$ είναι 0^0

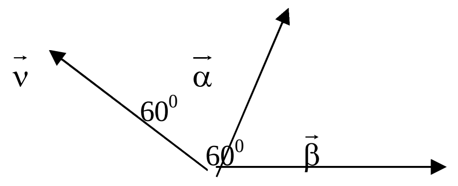


Η (3) γίνεται $3\ \sigma\upsilon\nu 0^0 = \frac{\lambda}{2} + \mu$ $\Rightarrow$ $3 = \frac{\lambda}{2} + \mu$ **(4)** .

Λύνοντας το σύστημα των (2), (4) βρίσκουμε $\lambda = 0$ και $\mu = 3$.

(1) $\Rightarrow$ $\vec{\nu} = 0\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$

- Όταν η γωνία των $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$ είναι 120^0



Η (3) γίνεται $3\ \sigma\upsilon\nu 120^0 = \frac{\lambda}{2} + \mu$ $\Rightarrow$ $3(-\frac{1}{2}) = \frac{\lambda}{2} + \mu$ **(5)**

Λύνοντας το σύστημα των (2), (5) βρίσκουμε $\mu = -3$ και $\lambda = 3$

(1) $\Rightarrow$ $\vec{\nu} = 3\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$

ΘΕΜΑ 16^0 Δ

Έστω $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{x}$ **μη μηδενικά διανύσματα έτσι ώστε να ισχύουν**

$\vec{\beta} \perp \vec{x}$, $\quad \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 2$, $\quad \vec{\alpha}\cdot\vec{x} + 1 = 0$, $\quad |\vec{\alpha}| = 1$, $\quad |\vec{x}| = 2$

i) Να εξετάσετε αν τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ **είναι συγγραμμικά**

ii) Να βρείτε το $\vec{x}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$

ΛΥΣΗ

i) Αν τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ήταν συγγραμμικά, επειδή $\vec{\beta} \perp \vec{x}$ θα ήταν και $\vec{\alpha} \perp \vec{x}$,
οπότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{x} = 0$, άρα η υπόθεση $\vec{\alpha}\cdot\vec{x} + 1 = 0$ θα έδινε $1 = 0$, που είναι άτοπο.

Επομένως τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά

ii) Έστω $\vec{x} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta} \Rightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{x} = \vec{\alpha}\cdot(\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta})$

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{x} = \lambda\vec{\alpha}^2 + \mu(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})$$

$$-1 = \lambda + 2\mu \qquad \textbf{(1)}$$

$\vec{x} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta} \Rightarrow \vec{x}\cdot\vec{x} = \vec{x}\cdot(\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta})$

$$\vec{x}^2 = \lambda(\vec{\alpha}\cdot\vec{x}) + \mu(\vec{\beta}\cdot\vec{x})$$

$$4 = \lambda(-1) + \mu.\,0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -4 \qquad \textbf{(2)}$$

Η (1) $\Rightarrow \; -1 = -4 + 2\mu \;\Rightarrow\; \mu = \dfrac{3}{2}$

Άρα $\vec{x} = -\,4\vec{\alpha} + \dfrac{3}{2}\vec{\beta}$

ΘΕΜΑ 17^0 Δ

Α. Έστω δύο μη συγγραμμικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ **και λ πραγματικός αριθμός έτσι ώστε να ισχύει** $\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta} = \vec{\gamma}$ **και** $|\vec{\gamma}| = 1$. **Δείξτε ότι** $|\vec{\alpha}|\,\eta\mu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) \le 1$.

Β. Αν $|\vec{\alpha}| = 2$ **και** $|\vec{\beta}| = \sqrt{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} - 1}$, **δείξτε ότι** $\vec{\alpha} = 2\vec{\beta}$.

ΛΥΣΗ

Α. $\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta} = \vec{\gamma} \Rightarrow (\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta})^2 = \vec{\gamma}^2$

$$\vec{\alpha}^2 + \lambda^2\vec{\beta}^2 + 2\lambda(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}) = \vec{\gamma}^2$$

$$|\vec{\beta}|^2\lambda^2 + 2(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}).\lambda + |\vec{\alpha}|^2 - |\vec{\gamma}|^2 = 0$$

$$|\vec{\beta}|^2\lambda^2 + 2(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}).\lambda + |\vec{\alpha}|^2 - 1 = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

Η (1) είναι εξίσωση δευτέρου βαθμού ως προς λ, η οποία γνωρίζουμε από την υπόθεση πως έχει λύση, άρα

$\Delta \ge 0 \Rightarrow 4(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})^2 - 4|\vec{\beta}|^2\left(|\vec{\alpha}|^2 - 1\right) \ge 0 \Rightarrow 4|\vec{\alpha}|^2|\vec{\beta}|^2\sigma\upsilon\nu^2(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) - 4|\vec{\alpha}|^2|\vec{\beta}|^2 + 4|\vec{\beta}|^2 \ge 0 \Rightarrow$

$|\vec{\alpha}|^2\sigma\upsilon\nu^2(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) - |\vec{\alpha}|^2 + 1 \ge 0 \Rightarrow$

$1 - |\vec{\alpha}|^2\left(1 - \sigma\upsilon\nu^2(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})\right) \ge 0 \Rightarrow 1 - |\vec{\alpha}|^2\eta\mu^2(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) \ge 0 \Rightarrow |\vec{\alpha}|^2\eta\mu^2(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) \le 1 \Rightarrow |\vec{\alpha}|\,\eta\mu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) \le 1$

Β. $|\vec{\beta}| = \sqrt{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} - 1} \Rightarrow |\vec{\beta}|^2 = \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} - 1 \Leftrightarrow |\vec{\beta}|^2 = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha}\,\vec{\beta}}) - 1 \Rightarrow |\vec{\beta}|^2 - 2\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha}\,\vec{\beta}})|\vec{\beta}| + 1 = 0 \quad \textbf{(1)}$

Η εξίσωση (1) είναι δευτέρου βαθμού ως προς $|\vec{\beta}|$, η οποία έχει λύση αφού $|\vec{\beta}| \in \mathbb{R}$, άρα $\Delta \geq 0 \Rightarrow$

$$4\sigma\upsilon\nu^2(\vec{\alpha}\,\hat{}\,\vec{\beta}) - 4 \geq 0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu^2(\vec{\alpha}\,\hat{}\,\vec{\beta}) - 1 \geq 0 \Rightarrow -\eta\mu^2(\vec{\alpha}\,\hat{}\,\vec{\beta}) \geq 0 \Rightarrow \eta\mu^2(\vec{\alpha}\,\hat{}\,\vec{\beta}) = 0$$

$$\eta\mu(\vec{\alpha}\,\hat{}\,\vec{\beta}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha}\,\hat{}\,\vec{\beta}) = \pm 1$$

- Για $\sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha}\,\hat{}\,\vec{\beta}) = 1$, δηλαδή $(\vec{\alpha}\,\hat{}\,\vec{\beta}) = 0^o$ επομένως $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$

  η (1) γίνεται $|\vec{\beta}|^2 - 2 \cdot |\vec{\beta}| + 1 = 0$

  $$\left(|\vec{\beta}| - 1\right)^2 = 0$$

  $$|\vec{\beta}| - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |\vec{\beta}| = 1$$

  Αφού $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$, θα υπάρχει $\lambda > 0$ ώστε $\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta} \quad \Rightarrow$

  $$|\vec{\alpha}| = |\lambda|\,|\vec{\beta}|$$

  $$2 = |\lambda| . 1 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda=2$$

  οπότε $\vec{\alpha} = 2\vec{\beta}$

- Για $\sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha}\,\hat{}\,\vec{\beta}) = 1$, δηλαδή $(\vec{\alpha}\,\hat{}\,\vec{\beta}) = 180^o$ επομένως $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$,

  Ομοίως συμπεραίνουμε $\vec{\alpha} = 2\vec{\beta}$

ΘΕΜΑ 18^0 Γ

Αν $\vec{\alpha} = (4,\ 3)$ και $\vec{\beta} = (-1,\ 2)$ **, να βρεθεί η** $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}$

ΛΥΣΗ

Έστω $\vec{x} = \pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}$

$\vec{x}$, $\vec{\alpha}$ συγγραμμικά $\Rightarrow$ $\vec{x} = \lambda\vec{\alpha}$ **(1)** όπου $\lambda \in \mathbb{R}$

Αλλά $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot \pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot \vec{x} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha}(\lambda\vec{\alpha}) \Leftrightarrow 4(-1) + 3.\,2 = \lambda\vec{\alpha}^2$

$$-4 + 6 = \lambda|\vec{\alpha}|^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2 = 25\lambda \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{2}{25}$$

Οπότε, η (1) $\Leftrightarrow$ $\vec{x} = \dfrac{2}{25}(4,\ 3) = \left(\dfrac{8}{25},\ \dfrac{6}{25}\right)$

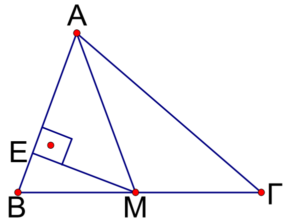
ΘΕΜΑ 19^0 Δ

Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΑΒ = 2, ΑΓ = 6, $B\hat{A}\Gamma = 60^o$ **και ΑΜ διάμεσός του.**
Να βρείτε

i) το $|\overrightarrow{AM}|$

ii) το $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}$

iii) την $\pi\rho o\beta_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{AM}$ **συναρτήσει του** $\overrightarrow{AB}$



ΛΥΣΗ

Έστω $\overrightarrow{AE} = \pi\rho o\beta_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{AM}$

i) $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma}) \quad \Rightarrow \quad |\overrightarrow{AM}| = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma}|$

$$|\overrightarrow{AM}|^2 = \frac{1}{4}|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma}|^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma})^2 = \ = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{A\Gamma}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}) =$$

$$=\frac{1}{4}\left(\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|^2+2\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|\sigma\upsilon\nu(\overrightarrow{AB}\,\hat{}\,\overrightarrow{A\Gamma}\right)=\frac{1}{4}(4+36+2\cdot 2\cdot 6\cdot\frac{1}{2})=13 \quad\Rightarrow\quad \left|\overrightarrow{AM}\right|=\sqrt{13}$$

ii) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma})$

$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma})$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|\sigma\upsilon\nu(\overrightarrow{AB}\,\hat{}\,\overrightarrow{A\Gamma})\right)$$

$$=\frac{1}{2}\ (4+2\cdot 6\cdot\frac{1}{2})\ =\ 5$$

iii $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}\ =\ \overrightarrow{AB}\cdot\pi\rho o\beta_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{AM}\quad\overset{(ii)}{\Rightarrow}\quad 5=\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}$ **(1)**

Αλλά $\overrightarrow{AE}$ συγγραμμικό του $\overrightarrow{AB}$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AE}\ =\ \lambda\overrightarrow{AB}$ **(2)**

(1) $\Rightarrow$ $5=\ \overrightarrow{AB}\cdot(\lambda\overrightarrow{AB})\ \Rightarrow\ 5=\lambda\ \overrightarrow{AB}^2\ \Rightarrow 5=\lambda\,.\,2^2\ \Rightarrow\ \lambda=\frac{5}{4}$

(2) $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AE}\ =\ \frac{5}{4}\ \overrightarrow{AB}$

ΘΕΜΑ 20^0 Γ

Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1,\ 2)$ και $\vec{\beta}=(-1,\ 4)$. Να βρείτε τα διανύσματα

i) $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}(\vec{\alpha}-\vec{\beta})$ **ii)** $\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}(2\vec{\alpha}+3\vec{\beta})$

ΛΥΣΗ

i) Έστω $\vec{x}=\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}(\vec{\alpha}-\vec{\beta})$

$\vec{\alpha},\ \vec{x}$ συγγραμμικά $\Rightarrow$ $\vec{x}=\lambda\vec{\alpha}$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$ **(1)**

$\vec{\alpha}(\vec{\alpha}-\vec{\beta})=\vec{\alpha}\cdot\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}(\vec{\alpha}-\vec{\beta})\ \Rightarrow\ \vec{\alpha}^2-\ \vec{\alpha}\ \vec{\beta}\ =\ \vec{\alpha}\ \vec{x}$

$$\vec{\alpha}^2-\vec{\alpha}\ \vec{\beta}\ =\ \vec{\alpha}\ \lambda\vec{\alpha}$$

$$\vec{\alpha}^2-\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\lambda\vec{\alpha}^2$$

$$1^2+2^2-[1(-1)+2.\ 4]=\lambda(1^2+2^2)$$

$$5-7\ =5\lambda\quad\Rightarrow\quad\lambda=-\frac{2}{5}$$

Η (1) $\Rightarrow$ $\vec{x}=-\frac{2}{5}\ \vec{\alpha}\ =-\frac{2}{5}(1,\ 2)\ =\left(-\frac{2}{5},\ -\frac{4}{5}\right)$

ii) Έστω $\vec{\psi}=\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}(2\vec{\alpha}+3\vec{\beta})$

$\vec{\beta},\ \vec{\psi}$ συγγραμμικά $\Rightarrow$ $\vec{\psi}=\mu\vec{\beta}$, όπου $\mu\in\mathbb{R}$ **(2)**

$\vec{\beta}\cdot(2\vec{\alpha}+3\vec{\beta})=\vec{\beta}\cdot\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}(2\vec{\alpha}+3\vec{\beta})\ \Rightarrow\ \vec{\beta}\cdot(2\vec{\alpha}+3\vec{\beta})=\vec{\beta}\ \vec{\psi}$

$$2\vec{\alpha}\ \vec{\beta}+3\vec{\beta}^2\ =\vec{\beta}\,(\mu\vec{\beta})$$

$$2\vec{\alpha}\ \vec{\beta}+3\vec{\beta}^2\ =\mu\vec{\beta}^2$$

$$2[1(-1)+2.\ 4]+3(1^2+4^2)=\mu(1^2+4^2)$$

$$14+51\ \ =17\mu\quad\Leftrightarrow\quad\mu=\frac{65}{17}$$

Η (2) $\Rightarrow$ $\vec{\psi}\ =\ \frac{65}{17}\ (-1,\ 4)\ =\left(-\frac{65}{17},\ \frac{260}{17}\right)$

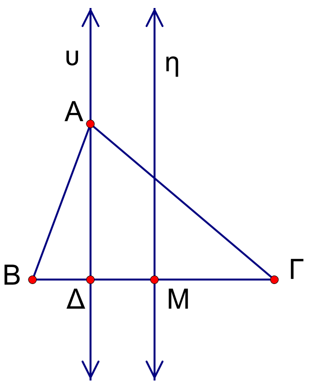
ΘΕΜΑ 21^{0} B

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές Α(-1, 0), Β(3, 2) και Γ(-3, 4). Να βρείτε :

i) Τις εξισώσεις των υψών του

ii) Τις εξισώσεις των μεσοκαθέτων των πλευρών του.

ΛΥΣΗ



i) $\lambda_{ΒΓ} = \dfrac{y_Γ - y_Β}{x_Γ - x_Β} = \dfrac{4-2}{-3-3} = \dfrac{2}{-6} = -\dfrac{1}{3}$

$ΑΔ \perp ΒΓ \iff \lambda_{ΑΔ} . \lambda_{ΒΓ} = -1 \iff \lambda_{ΑΔ} = 3$

ΑΔ : $y - y_Α = 3\,(x - x_Α) \iff$
$y - 0 = 3\,(x + 1) \iff$
$y = 3x + 3$

Ομοίως βρίσκουμε τις εξισώσεις των άλλων δύο υψών.

ii)Μ μέσο του ΒΓ $\quad x_Μ = \dfrac{1}{2}(x_Γ + x_Β)$ και $y_Μ = \dfrac{1}{2}(y_Γ + y_Β) \iff$

$x_Μ = \dfrac{1}{2}(-3+3)$ και $y_Μ = \dfrac{1}{2}(4+2) \iff$

$x_Μ = 0$ και $y_Μ = 3$

μεσοκάθετος η □ΑΔ $\iff \lambda_η = 3$

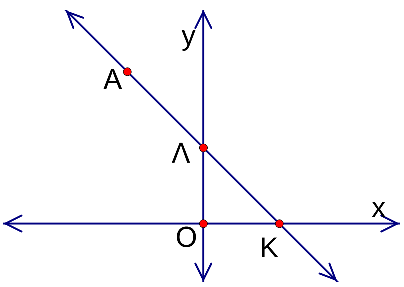
η : $y - y_Μ = 3(x - x_Μ) \iff y - 3 = 3(x - 0) \iff y = 3x + 3$

Ομοίως βρίσκουμε τις εξισώσεις των άλλων δύο μεσοκαθέτων.

ΘΕΜΑ 22^{0} B

Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών, που διέρχονται από το σημείο Α(-1, 2) και σχηματίζουν με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.

ΛΥΣΗ



Έστω ΑΛΚ ζητούμενη ευθεία.

Αφού διέρχεται από το Α, θα έχει εξίσωση
$y - 2 = \lambda(x + 1) \iff$
$y = \lambda x + \lambda + 2 \qquad$ **(1)**

Περιορισμός :
Για να ορίζεται τρίγωνο ΟΚΛ, θα πρέπει η ευθεία να τέμνει τους άξονες και μάλιστα σε διαφορετικά σημεία Κ, Λ, άρα θα πρέπει $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq -2$

Συντεταγμένες του Κ :

Για $y_Κ = 0$, η (1) $\Rightarrow 0 - 2 = \lambda\, x_Κ + \lambda \Rightarrow \lambda x_Κ = -\lambda - 2 \Rightarrow x_Κ = -\dfrac{\lambda + 2}{\lambda}$.

Συντεταγμένες του Λ :

Για $x_Λ = 0$, η (1) $\Rightarrow y_Λ - 2 = \lambda(0 + 1) \Rightarrow y_Λ = \lambda + 2$

Τρίγωνο ΟΚΛ ισοσκελές $\Leftrightarrow$ (ΟΚ) = (ΟΛ)

$$|x_K| = |y_\Lambda|$$

$$\left|-\frac{\lambda+2}{\lambda}\right| = |\lambda+2|$$

$$\frac{|\lambda+2|}{|\lambda|} = |\lambda+2|$$

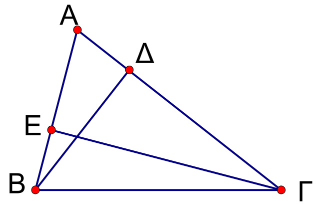
$$\frac{1}{|\lambda|} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |\lambda| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -1$$

Άρα ζητούμενη ευθεία (1) είναι $y = 1x + 1 + 2$ ή $y = -1x - 1 + 2$ $\Leftrightarrow$
$y = x + 3$ ή $y = -x + 1$

ΘΕΜΑ 23ο Γ

Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών και τις συντεταγμένες των κορυφών Β και Γ του τριγώνου ΑΒΓ, του οποίου τα δύο ύψη έχουν εξισώσεις $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ και $y = -x + 2$ αντιστοίχως και η κορυφή Α έχει συντεταγμένες (1, 4)

ΛΥΣΗ



Διαπιστώνουμε ότι η κορυφή Α δεν επαληθεύει καμία από τις εξισώσεις των υψών.

Έστω, λοιπόν ΒΔ : $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ και

ΓΕ : $y = -x + 2$

$A\Gamma \perp B\Delta \Leftrightarrow \lambda_{A\Gamma} \cdot \lambda_{B\Delta} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{A\Gamma} = -2$

ΑΓ : $y - 4 = -2(x - 1) \Leftrightarrow y = -2x + 2 + 4 \Leftrightarrow y = -2x + 6$

$AB \perp \Gamma E \Leftrightarrow \lambda_{AB} \cdot \lambda_{\Gamma E} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{AB} = 1$

ΑΒ : $y - 4 = 1(x - 1) \Leftrightarrow y = x - 1 + 4 \Leftrightarrow y = x + 3$

Για τις συντεταγμένες του Β, λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων των ΑΒ, ΒΔ

$$\begin{cases} y=x+3 \\ y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} y=x+3 \\ x+3=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} y=x+3 \\ 2x+6=x+3 \end{cases} \quad \begin{cases} y=x+3 \\ x=-3 \end{cases} \quad \begin{cases} y=0 \\ x=-3 \end{cases}$$

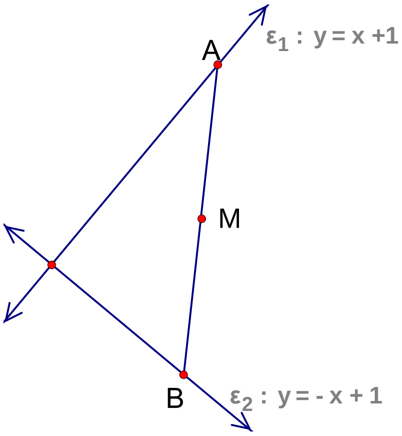
Για τις συντεταγμένες του Γ, λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων των ΑΓ, ΓΕ

$$\begin{cases} y=-2x+6 \\ y=-x+2 \end{cases} \quad \begin{cases} -x+2=-2x+6 \\ y=-x+2 \end{cases} \quad \begin{cases} x=4 \\ y=-2 \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 24ο Γ

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο Μ(2, 1) και τέμνει τις ευθείες $y = x + 1$ και $y = -x + 1$ στα σημεία Α και Β αντιστοίχως, έτσι ώστε το Μ να είναι μέσο του ΑΒ.

ΛΥΣΗ



Έστω $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$

$A \in \varepsilon_1 \;\Rightarrow\; y_1 = x_1 + 1$ **(1)**

$B \in \varepsilon_2 \;\Rightarrow\; y_2 = -x_2 + 1$ **(2)**

M μέσο του AB $\Rightarrow$

$2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ και $1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) \;\Rightarrow$

$x_1 + x_2 = 4$ **(3)** και $y_1 + y_2 = 2$ **(4)**

Η (4), λόγω των (1), (2) γίνεται $x_1 + 1 - x_2 + 1 = 2 \;\Rightarrow\; x_1 = x_2$

Η (3) γίνεται $2x_1 = 4 \;\Rightarrow\; x_1 = 2 = x_2$

Άρα η ζητούμενη ευθεία έχει εξίσωση $x = 2$

ΘΕΜΑ 25^0 Δ

Δίνεται η εξίσωση (2x -3y +4) + λ(x +3y +2)=0 (1).

α) Να δείξετε ότι για κάθε λ ∈ R η (1) παριστάνει ευθεία.

β) Να δείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση (1) (οικογένεια ευθειών) διέρχονται από το ίδιο σημείο.

γ) Ποια από τις ευθείες που παριστάνει η (1)διέρχεται από το σημείο(2,-1);

δ) Από όλες τις ευθείες της (1) να βρείτε εκείνη που είναι παράλληλη

i) στον άξονα x'x ii) στον άξονα y'y ;

ε) Από όλες τις ευθείες της (1) να βρείτε εκείνη που είναι κάθετη στην ευθεία ε_1: 2x +y -5=0 ;

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση (1) γράφεται : (2+λ)x +(3λ -3)y +2λ +4 =0.

Παρατηρούμε ότι ο συντελεστής του x μηδενίζεται για λ = - 2 ενώ ο συντελεστής του y για λ=1. Συνεπώς δεν υπάρχει τιμή του λ για την οποία να μηδενίζονται ταυτόχρονα και ο συντελεστής του x και του y, οπότε η (1) παριστάνει για κάθε τιμή του λ ∈ R ευθεία.

β) Θεωρούμε δυο ευθείες της (1) ,

για λ = - 2 έχουμε ε': -9y =0⇔y=0 και

για λ= 1 έχουμε ε'':3x +6 =0. Το σημείο τομής των ευθειών αυτών είναι το (- 2, 0) το οποίο είναι το σταθερό σημείο απ' όπου διέρχονται οι ευθείες που παριστάνει η (1) αφού επαληθεύει την εξίσωση τους.

γ) Για x=2 και y=-1 η (1) γράφεται (2+λ).2+(3λ-3).(-1)+2λ+4=0⇔λ=-11.

Άρα η ζητούμενη ευθεία είναι η -9x-36y-18=0⇔x+4y+2=0.

δ) Για να είναι μια ευθεία της (1) παράλληλη στον

i) άξονα x'x θα πρέπει 2+λ=0⇔λ=-2.οποτε η ζητούμενη ευθεία είναι y=0

ii) άξονα y'y θα πρέπει 3λ-3 =0⇔λ=1.Οποτε η ζητούμενη ευθεία είναι η 3x+6=0 δηλ. η x= -2

ε) Η ε_1 είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta}$ =(1,-2).Επίσης για κάθε λ ∈ Rοι ευθείες ε της (1) είναι παράλληλες στο διάνυσμα $\vec{\delta}'$=(3λ-3, -2-λ).

Έτσι ε ⊥ ε_1 ⇔ $\vec{\delta} \perp \vec{\delta}'$ ⇔ $\vec{\delta}'\,\vec{\delta}$ =0⇔(3λ-3).1+(-2-λ).(-2)=0⇔3λ-3+4+2λ=0⇔5λ=-1⇔λ= -1/5. Άρα η ζητούμενη ευθεία είναι η 11x-12y+22=0.

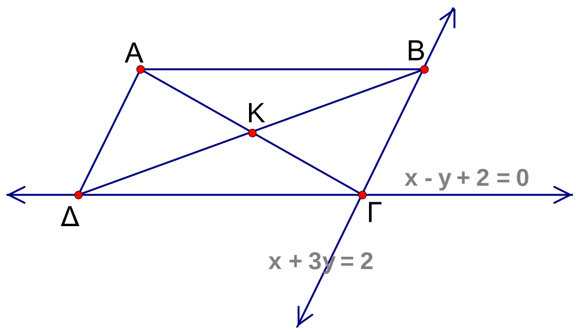
ΘΕΜΑ 26^0 Γ

Τα σημεία Α(-4, 6) και Γ(-1, 1) είναι οι απέναντι κορυφές ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Οι πλευρές ΒΓ και ΓΔ του παραλληλογράμμου ανήκουν στις ευθείες με εξισώσεις $x + 3y = 2$ και $x – y + 2 = 0$ αντιστοίχως. Να υπολογίσετε :

(i) Τις συντεταγμένες της κορυφής Δ.

(ii) Το συνημίτονο της οξείας γωνίας των διαγωνίων του παραλληλογράμμου.

ΛΥΣΗ



(i) $ΑΔ \parallel ΒΓ \Rightarrow λ_{ΑΔ} = λ_{ΒΓ} = -\frac{1}{3}$

ΑΔ : $y - 6 = -\frac{1}{3}(x+4) \Leftrightarrow$

$3y – 18 = –x – 4 \Leftrightarrow$

$\mathbf{x + 3y = 14}$

Οι συντεταγμένες του Δ θα είναι η λύση του συστήματος

$\begin{cases} x+3y=14 \\ x-y=-2 \end{cases}$ των εξισώσεων των ευθειών ΑΔ και ΔΓ

$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 3 = -4,$

$D_x = \begin{vmatrix} 14 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -14 + 6 = -8, \qquad D_y = \begin{vmatrix} 1 & 14 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 14 = -16$

$x = \frac{D_x}{D} = 2, \qquad y = \frac{D_y}{D} = 4 \qquad$ Άρα **Δ(2, 4)**

(ii) $λ_{\overline{ΑΓ}} = \frac{1-6}{-1+4} = -\frac{5}{3} \Rightarrow \overrightarrow{ΑΓ} \parallel \vec{δ}_1 = (3, -5)$

Το σημείο τομής Κ των διαγωνίων είναι μέσο της ΑΓ.

Άρα $Κ(\frac{-4-1}{2}, \frac{1+6}{2}), \qquad Κ(-\frac{5}{2}, \frac{7}{2})$

$λ_{\overline{ΔΒ}} = λ_{\overline{ΔΚ}} = \dfrac{\frac{7}{2}-4}{-\frac{5}{2}-2} = \frac{7-8}{-5-4} = \frac{1}{9} \Rightarrow \overrightarrow{ΔΒ} \parallel \vec{δ}_2 = (9, 1)$

$συν(\vec{δ}_1, \vec{δ}_2) = \dfrac{\vec{δ}_1 . \vec{δ}_2}{|\vec{δ}_1|\,|\vec{δ}_2|} = \dfrac{3\,.\,9 - 5\,.\,1}{\sqrt{3^2+5^2}\sqrt{9^2+1^2}} = \dfrac{22}{\sqrt{9+25}\sqrt{81+1}} = \dfrac{22}{\sqrt{24}\sqrt{82}}$

ΘΕΜΑ 27^0 Γ

Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών οι οποίες διέρχονται από την αρχή των αξόνων Ο και απέχουν από το σημείο Α(–1, 3) απόσταση ίση με 1.

ΛΥΣΗ

Η ζητούμενη ευθεία ε, αφού διέρχεται από την αρχή των αξόνων, θα έχει εξίσωση

$x = 0$ ή $y = λx$, $λ \in \mathbb{R}$. **(1)**

- Όταν ε : $x = 0$

$d(A, \varepsilon) = \dfrac{|1.(-1)+0+0|}{\sqrt{1^2+0^2}} = 1$, άρα η ευθεία $x = 0$ είναι λύση του προβλήματος.

- Όταν $\varepsilon: \ y = \lambda x \iff \lambda x - y = 0$

$d(A, \varepsilon) = 1 \iff \dfrac{|\lambda.(-1)-1.3+0|}{\sqrt{\lambda^2+1^2}} = 1 \iff |\lambda+3| = \sqrt{\lambda^2+1} \iff \lambda^2+6\lambda+9 = \lambda^2+1$

$\iff 6\lambda = -8 \iff \lambda = -\dfrac{4}{3}$ Άρα $\varepsilon: \ y = -\dfrac{4}{3}x$

ΘΕΜΑ 28^0 Γ

Δίνονται τα σημεία A(–1, –2) και B(3, 1). Να βρείτε το σύνολο των σημείων M, για τα οποία ισχύει (MAB) = 8

ΛΥΣΗ

Έστω M(x, y) τυχαίο σημείο για το οποίο ισχύει (MAB) = 8

$\overrightarrow{AM} = (x + 1, y + 2)$, $\overrightarrow{AB} = (3 + 1, 1 + 2) = (4, 3)$

$(MAB) = 8 \iff \dfrac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}\right)\right| = 8 \iff \left|\begin{vmatrix} x+1 & y+2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}\right| = 16 \iff$

$|3x+3-4y-8| = 16 \iff |3x-4y-5| = 16 \iff$

$3x - 4y - 5 = 16$ ή $3x - 4y - 5 = -16 \iff$

$3x - 4y - 21 = 0$ ή $3x - 4y + 11 = 0$

ΘΕΜΑ 29^0 Γ

Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\lambda x + (\lambda - 1)y = 2\lambda$ και $(\lambda + 1)x + \lambda y = 2\lambda + 1$ τέμνονται για όλες τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$. Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων τομής τους;

ΛΥΣΗ

$D = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda-1 \\ \lambda+1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (\lambda^2 - 1) = \lambda^2 - \lambda^2 + 1 = 1 \neq 0.$

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, άρα οι ευθείες τέμνονται.

$D_x = \begin{vmatrix} 2\lambda & \lambda-1 \\ 2\lambda+1 & \lambda \end{vmatrix} = 2\lambda^2 - 2\lambda^2 + 2\lambda - \lambda + 1 = \lambda + 1$

$D_y = \begin{vmatrix} \lambda & 2\lambda \\ \lambda+1 & 2\lambda+1 \end{vmatrix} = 2\lambda^2 + \lambda - 2\lambda^2 - 2\lambda = -\lambda$

Έστω M(x, y) τυχαίο σημείο τομής τους. Τότε

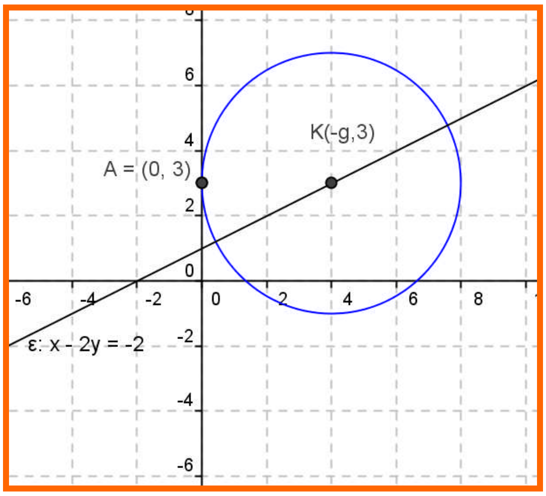
$\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} \\ y = \dfrac{D_y}{D} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{\lambda+1}{1} \\ y = \dfrac{-\lambda}{1} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \lambda+1 \\ y = -\lambda \end{cases} \iff \begin{cases} x = \lambda+1 \\ \lambda = -y \end{cases} \iff \begin{cases} x = -y+1 \\ \lambda = -y \end{cases} \iff$

$x = -y + 1 \iff x + y - 1 = 0$

ΘΕΜΑ 30^0 Γ

Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου του οποίου το κέντρο βρίσκεται στην ευθεία $x-2\psi+2=0$ και ο οποίος εφάπτεται του άξονα των ψ στο σημείο A(0,3)

ΛΥΣΗ



Έστω η εξίσωση του κύκλου είναι

$$(\chi-\chi_0)^2+(\psi-\psi_0)^2=\rho^2 \qquad (1)$$

- Αφού ο κύκλος έχει το κέντρο του πάνω στην ευθεία $x-2\psi+2=0$.θα ισχύει ότι $x_0-2\psi_0+2=0$
- Αφού ο κύκλος εφάπτεται του άξονα των ψ στο σημείο A(0,3) ,έχουμε $\psi_0=3$
- Κατά συνέπεια το κέντρο προσδιορίζεται από τη λύση του συστήματος

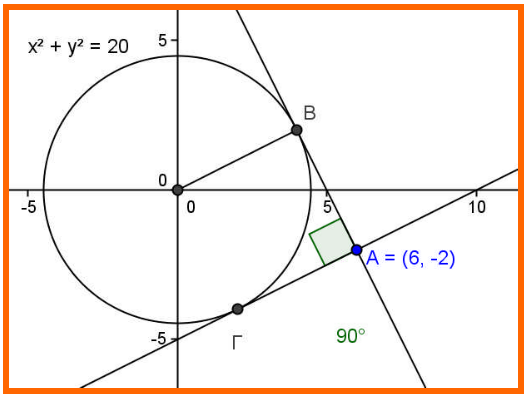
$$\begin{cases} x_0-2\psi_0+2=0 \\ \psi_0=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi_0=4 \\ \psi_0=3 \end{cases} \quad \text{Άρα } K(4,3)$$

Είναι ακόμη $\rho=d(K,A)=4$ οπότε από τη σχέση (1) έχουμε $(\chi-4)^2+(\psi-3)^2=16$

ΘΕΜΑ 31^0 Γ

Δίδεται κύκλος με εξίσωση $\chi^2+y^2=20$ και το σημείο A(6,-2) .Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων που άγονται από το σημείο A στον κύκλο και τα σημεία επαφής .

ΛΥΣΗ



Να θυμηθούμε ότι από σημείο εκτός κύκλου άγονται 2 εφαπτόμενες και ότι η εφαπτόμενη και ακτίνα σχηματίζουν ορθή γωνία

Η εξίσωση εφαπτομένης έχει μορφή : (ε) y= λχ + β ή λχ -y +β =0

(Σκοπός μας είναι να βρούμε το λ και β.)Α ν βρούμε μια τιμή για το λ η άλλη εφαπτομένη είναι η χ=κ όπου κ η τεταγμένη το σημείου Α)

Ο κύκλος με εξ. $\chi^2+y^2=20$ έχει κέντρο K(0,0) και $R=\sqrt{20}$ Η απόσταση του κέντρου του κύκλου από την εφαπτομένη ισούται με R .

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+\Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}} \Rightarrow R=\frac{|0\lambda_1-0_1+\beta|}{\sqrt{\lambda^2+1^2}} \Rightarrow \sqrt{20}=\frac{|\beta|}{\sqrt{\lambda^2+1}} \Rightarrow \sqrt{20}\sqrt{\lambda^2+1}=|\beta| \qquad (1)$$

Η εφαπτομένη περνά από το σημείο A(6,-2):

$$\left.\begin{matrix} y=\lambda\chi+\beta \\ A(6,-2) \end{matrix}\right\} \Rightarrow -2=6\lambda+\beta \Rightarrow \beta=-(6\lambda+2) \qquad (2)$$

$$A\pi o\ (1),(2) \Rightarrow 20(\lambda^2+1)=(-(6\lambda+2)^2) \Rightarrow 20\lambda^2+20=36\lambda^2+24\lambda+4$$

$$\Rightarrow 16\lambda^2+24\lambda-16=0 \Rightarrow 2\lambda^2+3\lambda-2=0 \Rightarrow (2\lambda-1)(\lambda+2)=0 \Rightarrow \lambda_1=\tfrac{1}{2} \quad \lambda_2=-2$$

$\bullet A\nu\ \lambda_1=\frac{1}{2} \Rightarrow A\pi o\ (2)\ \beta=-(6\lambda+2) \Rightarrow \beta=-5$

$E\xi\ \varepsilon\phi: y=\frac{1}{2}x-5 \Rightarrow x-2y-10=0 \qquad (3)$

$\bullet A\nu\ \lambda_2=-2 \Rightarrow A\pi o\ (2)\ \beta=-(6\lambda+2) \Rightarrow \beta=10$

$E\xi\ \varepsilon\phi: y=-2x+10\ (4)$

$\Sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}\alpha\ \varepsilon\pi\alpha\varphi\acute{\eta}\varsigma:\ \text{Απο}\,(3)\ x=2y+10 \qquad (5)$

$\text{Με}\ \alpha\nu\tau\iota\kappa\alpha\tau\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\ \sigma\tau\eta\ \varepsilon\xi.\ \kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\upsilon\ \acute{\varepsilon}\chi\omega$

$(2y+10)^2+y^2=20 \Rightarrow 4y^2+40y+100+y^2-20=0 \Rightarrow 5y^2+40y+80=0 \Rightarrow$

$y^2+8y+16=0 \Rightarrow (y+4)^2=0 \Rightarrow y=-4$

$\text{Για να βρω το } x \text{ η σχέση } (5)\ x=2(-4)+10=2 \Rightarrow \Gamma(-4,2)$

$\text{Για να βρούμε το σημείο επαφής της } y=-2x+10 \text{ με τον κύκλο με τον ίδιο τρόπο}$

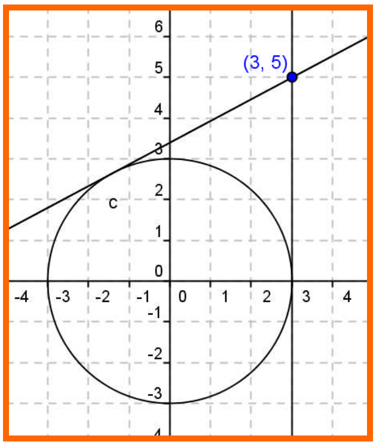
$\text{με αντικατάσταση στην εξίσωση του κύκλου βρίσκω το σημείο } \mathrm{B}(4,2)$

Η γωνία ΒΑΓ είναι ορθή γιατί $\lambda_1\cdot\lambda_2=-1$

ΘΕΜΑ 32^0 Γ

Να βρείτε την εφαπτομένη του κύκλου $\chi^2+y^2=9$ που άγεται από το σημείο (3,5)

ΛΥΣΗ



ΣΧΟΛΙΟ

<u>Αν βρούμε μόνο μια τιμή για την κλίση λ</u> της εφαπτομένης η άλλη εφαπτομένη είναι κάθετη στον οριζόντιο άξονα και η κλίση δεν ορίζεται . Η εξίσωση της είναι η x = κ όπου κ η τετμημένη του σημείου από το οποιο άγεται η εφαπτομένη .

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+\Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}} \Rightarrow R=\frac{|0\lambda_1-0_1+\beta|}{\sqrt{\lambda^2+1^2}} \Rightarrow 3=\frac{|\beta|}{\sqrt{\lambda^2+1}} \Rightarrow 3\sqrt{\lambda^2+1}=|\beta| \qquad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} y=\lambda\chi+\beta \\ \mathrm{A}(3,5) \end{array}\right\} \Rightarrow 5=3\lambda+\beta \Rightarrow \beta=(5-3\lambda) \qquad (2)$$

$\text{Απο } (1),(2) \Rightarrow 9(\lambda^2+1)=(5-3\lambda)^2) \Rightarrow 9\lambda^2+9=9\lambda^2-30\lambda+25$

$\Rightarrow 30\lambda=16 \Rightarrow \lambda=\dfrac{8}{15}$

$\bullet\,\text{Αν } \lambda=\dfrac{8}{15} \Rightarrow \text{Απο } (2)\ \beta=\dfrac{51}{15}$

$\text{Εξ εφ}: y=\tfrac{8}{15}x+\tfrac{51}{15} \Rightarrow 15y-8x-51=0$

$\text{Η αλλη εξ.της εφ.είναι η }: x=3$

ΘΕΜΑ 33^0 Γ

Δίνονται οι κύκλοι $C_1:(x-2)^2+(y-3)^2=5^2$ και $C_2: x^2+(y+1)^2=3^2$.

(i) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης ε του κύκλου C_1 στο σημείο $A(5,-1)$.

(ii) Να αποδειχτεί ότι η ε εφάπτεται και του κύκλου C_2.

ΛΥΣΗ

Ο κύκλος C_1 έχει κέντρο $K(2,3)$ και ακτίνα 5, ενώ ο κύκλος C_2 έχει κέντρο $\Lambda(0,-1)$ και ακτίνα 3.

(i) Γνωρίζουμε από τη Γεωμετρία ότι ένα σημείο $M(x,y)$ ανήκει στην ε, αν και μόνο αν $AM\perp KA$, δηλαδή, αν και μόνο αν

$\vec{KA}\cdot\vec{AM}=0$. (1)

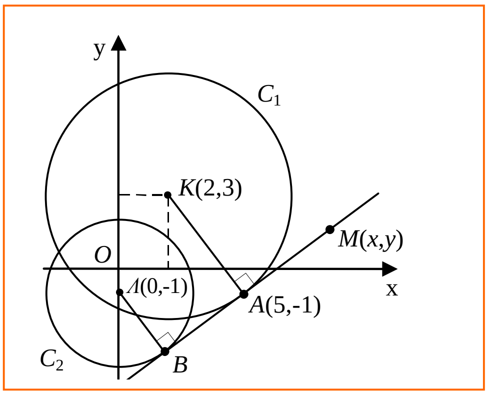
Όμως, $\vec{KA}=(3,-4)$ και $\vec{AM}=(x-5,y+1)$.

Έτσι, η (1) γράφεται διαδοχικά

$3(x-5)-4(y+1)=0$

$3x-4y-19=0$.

Άρα, η εξίσωση της ε είναι: $3x-4y-19=0$. (2)



(ii) Για να δείξουμε ότι η ε εφάπτεται του κύκλου C_2, αρκεί να δείξουμε ότι η απόσταση του κέντρου $\Lambda(0,-1)$ του C_2 από την ε είναι ίση με την ακτίνα του C_2, δηλαδή ίση με 3.

Έχουμε λοιπόν: $d(\Lambda,\varepsilon)=\dfrac{|3\cdot 0-4(-1)-19|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{15}{5}=3$.

ΘΕΜΑ 34^0 Γ

Να βρείτε την εφαπτομένη του κύκλου $x^2+y^2-2x+4y+4=0$ στο σημείο του $A(1,-1)$

ΛΥΣΗ

$x_0=-\dfrac{A}{2}=1$, $y_0=-\dfrac{B}{2}=-2$. Κέντρο το $K(1,-2)$

Έστω $M(x, y)$ το τυχαίο σημείο της εφαπτομένης στο A $\Leftrightarrow$

$\vec{AM}\perp\vec{AK} \Leftrightarrow \vec{AM}\cdot\vec{AK}=0 \Leftrightarrow$

$(x-1)(1-1)+(y+1)(-2+1)=0 \Leftrightarrow$

$(y+1)(-1)=0 \Leftrightarrow$

$-y-1=0 \Leftrightarrow y=-1$

ΘΕΜΑ 35^0 Β

Να βρείτε τη σχετική θέση των κύκλων

C_1: $x^2+y^2=1$ και C_2: $(x-1)^2+y^2=4$

ΛΥΣΗ

$K_1(0,0)$, $\rho_1=1$

$K_2(1,0)$, $\rho_2=2$

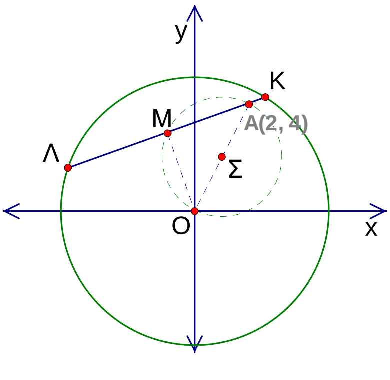
Είναι $(K_1K_2)=1$ και $\rho_2-\rho_1=2-1=1 \Rightarrow (K_1K_2)=\rho_2-\rho_1$

Άρα οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά.

ΘΕΜΑ 36^0 Γ

Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των μέσων των χορδών του κύκλου $x^2+y^2=25$, που διέρχονται από το σημείο $A(2, 4)$.

ΛΥΣΗ



Έστω $M(x, y)$ τυχαίο σημείο του γεωμετρικού τόπου $\Leftrightarrow$

το M είναι μέσο της τυχαίας χορδής $K\Lambda$, που διέρχεται από το A $\Leftrightarrow$

$OM\perp MA \Leftrightarrow$

το M βλέπει το τμήμα OA με ορθή γωνία $\Leftrightarrow$

το Μ διαγράφει κύκλο διαμέτρου ΟΑ

Το κέντρο του είναι $\Sigma(\frac{2+0}{2},\frac{4+0}{2}) = \Sigma(1, 2)$ και η ακτίνα του $\rho = (\Sigma O) = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$.

Άρα η εξίσωσή του είναι $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$

ΘΕΜΑ 37^0 Δ

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2\lambda x - 1 = 0$ (1), όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

(i) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του λ, η (1) παριστάνει κύκλο, του οποίου ζητείται να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα.

(ii) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι C_λ, που ορίζονται από την (1) για τις διάφορες τιμές του λ, διέρχονται από δύο σταθερά σημεία. Ποια είναι η εξίσωση της κοινής χορδής όλων αυτών των κύκλων;

ΛΥΣΗ

(i) Η εξίσωση (1) είναι της μορφής $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$.

$A^2 + B^2 - 4\Gamma = (-2\lambda)^2 + 0 + 4 = 4\lambda^2 + 4 > 0$

Άρα παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(\lambda, 0)$ και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{4\lambda^2+4}}{2} = \sqrt{\lambda^2+1}$

(ii) Για $\lambda = 0$, η (1) γίνεται $x^2 + y^2 = 1$ κύκλος C_0

Για $\lambda = 1$, η (1) γίνεται $x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$ κύκλος C_1

Σύστημα, για να βρούμε τα σημεία τομής των C_0, C_1

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2+y^2-2x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 1-2x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 0^2+y^2=1 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \text{ ή } y=-1 \\ x=0 \end{cases}$$

Τα σημεία τομής είναι $K(0, 1)$ και $\Lambda(0, -1)$

$K \in C_\lambda \Leftrightarrow 0^2 + 1^2 - 2\lambda.0 - 1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ που ισχύει, άρα οι κύκλοι C_λ διέρχονται από το K.

$\Lambda \in C_\lambda \Leftrightarrow 0^2 + (-1)^2 - 2\lambda.0 - 1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ που ισχύει, άρα οι κύκλοι C_λ διέρχονται από το Λ

Η εξίσωση της κοινής χορδής ΚΛ είναι $x = 0$.

ΘΕΜΑ 38^0 Γ

Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από το σημείο (1, 0) και εφάπτεται στις ευθείες $3x + y + 6 = 0$ και $3x + y - 12 = 0$.

ΛΥΣΗ

- Η ζητούμενη εξίσωση θα είναι της μορφής $(\chi-\chi_0)^2 + (\psi-\psi_0)^2 = \rho^2$ (1)

Οι δοσμένες ευθείες είναι παράλληλες, οπότε το κέντρο $K(\chi_0, \psi_0)$ του ζητούμενου κύκλου θα ανήκει στη μεσοπαράλληλη τους που είναι η (ε) $\psi = -3\chi + 3$.

Κατά συνέπεια θα έχουμε $\psi_0 = -3\chi_0 + 3$ (2)

- Η διάμετρος του ζητούμενου κύκλου είναι η απόσταση των ευθειών ε_1 και ε_2.

Κατά συνέπεια $\rho = \frac{1}{2}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{1}{2}(A, \varepsilon_2) = \frac{1}{2}\frac{|3(-1)+1(-3)-12|}{\sqrt{3^2+1^2}} = \frac{9}{\sqrt{10}}$

❖ Αφού ο κύκλος διέρχεται από το σημείο (1,0) θα είναι $\left(1-\chi_0\right)^2+\left(0-\psi_0\right)^2=\left(\frac{9}{\sqrt{10}}\right)^2 \overset{(2)}{\Leftrightarrow}$

ΘΕΜΑ 39^0 Γ

Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου $x^2 + y^2 = 4$ που είναι παράλληλες στηνευθεία $x + y = 0$.

ΛΥΣΗ

Η ζητούμενη εφαπτόμενη έχει εξίσωση ε→ $\chi\chi_1+\psi\psi_1=4$ όπου $\left(\chi_1,\psi_1\right)$ το σημείο επαφής

Όμως είναι $\varepsilon // \delta \to \psi+\chi=0$ οπότε $\alpha_1=\alpha_2 \Leftrightarrow -\frac{\chi_1}{\psi_1}=-1 \Leftrightarrow \psi_1=\chi_1$ (1)

Όμως το σημείο $\left(\chi_1,\psi_1\right)$ ανήκει στον κύκλο , κατά συνέπεια $\chi_1^2+\psi_1^2=4$ (2)

Λύνοντας το σύστημα των (1) και (2) έχουμε $\left(\chi_1,\psi_1\right)=\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ ή $\left(\chi_1,\psi_1\right)=\left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$

Κατά συνέπεια έχουμε δύο εφαπτόμενες

$\sqrt{2}\chi_1+\sqrt{2}\psi=4$ και $-\sqrt{2}\chi_1-\sqrt{2}\psi=4$

ΘΕΜΑ 40^0 Γ

Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $y=\frac{1}{4}x^2$ σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις :

(i) Όταν είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x + 1$

(ii) Όταν είναι κάθετη στην ευθεία $y = -2x$

(iii) Όταν διέρχεται από το σημείο $A(0, -1)$

ΛΥΣΗ

Η παραβολή γράφεται $x^2 = 4y \Leftrightarrow x^2 = 2.\,2y \Rightarrow \rho = 2$

Η εφαπτομένη της στο σημείο της $\Lambda(x_1,\ y_1)$ είναι

$\varepsilon:\ xx_1 = 2(y + y_1) \Leftrightarrow xx_1 = 2y + 2y_1 \Leftrightarrow 2y = x_1x - 2y_1 \Leftrightarrow y = \frac{x_1}{2}x - y_1$ **(1)**

(i) $\varepsilon \parallel y = x + 1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = 1 \Leftrightarrow \frac{x_1}{2} = 1 \Leftrightarrow x_1 = 2$

$\Lambda(x_1,\ y_1) \in$ στην παραβολή $\Leftrightarrow y_1 = \frac{1}{4}x_1^2 \Leftrightarrow y_1 = \frac{1}{4}2^2 = 1$

(1) $\Leftrightarrow$ $\varepsilon:\ y = x - 1$

(ii) $\varepsilon \perp y = -2x \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x_1}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_1 = 1$

$\Lambda(x_1,\ y_1) \in$ στην παραβολή $\Leftrightarrow y_1 = \frac{1}{4}x_1^2 \Leftrightarrow y_1 = \frac{1}{4}1^2 = \frac{1}{4}$

(1) $\Leftrightarrow$ $\varepsilon:\ y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$

(iii) $A(0, -1) \in \varepsilon \Leftrightarrow -1 = \frac{x_1}{2}.0 - y_1 \Leftrightarrow y_1 = 1$

$\Lambda(x_1,\ y_1) \in$ στην παραβολή $\Leftrightarrow y_1 = \frac{1}{4}x_1^2 \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{4}x_1^2 \Leftrightarrow x_1^2 = 4 \Leftrightarrow x_1 = 2$ ή $x_1 = -2$

$(1) \quad \Leftrightarrow \quad y = \dfrac{2}{2}x - 1 \quad ή \quad y = \dfrac{-2}{2}x - 1 \quad \Leftrightarrow$

$y = x - 1 \quad ή \quad y = -x - 1$

ΘΕΜΑ 41^{0} Γ

Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της έλλειψης $3x^2 + y^2 = 4$, οι οποίες :

(i) είναι παράλληλες προς την ευθεία $y = -3x + 1$

(ii) είναι κάθετες στην ευθεία $y = \dfrac{1}{2}x$

(iii) διέρχονται από το σημείο M(o, 4)

ΛΥΣΗ

(i)Έστω $\varepsilon: \; 3x_1x + y_1y = 4$ ζητούμενη εφαπτομένη, όπου $\Lambda(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής.

ε παράλληλη στην ευθεία $y = -3x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_\varepsilon = -3 \quad \Leftrightarrow \quad -\dfrac{3x_1}{y_1} = -3 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = y_1$

$\Lambda(x_1, y_1) \in$ στην έλλειψη $\Leftrightarrow \quad 3x_1^2 + y_1^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 3x_1^2 + x_1^2 + = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 4x_1^2 = 4 \quad \Leftrightarrow$

$x_1^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 1 \quad ή \quad x_1 = -1$

Για $x_1 = 1$ θα είναι $y_1 = 1$, οπότε $\varepsilon: \; 3.\,1x + 1y = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 3x + y = 4$

Για $x_1 = -1$ θα είναι $y_1 = -1$, οπότε $\varepsilon: \; 3.\,(-1)\,x + (-1)y = 4 \quad \Leftrightarrow \quad -3x - y = 4$

(ii)Έστω $\varepsilon: \; 3x_1x + y_1y = 4$ ζητούμενη εφαπτομένη, όπου $\Lambda(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής.

ε κάθετη στην ευθεία $y = \dfrac{1}{2}x \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_\varepsilon \cdot \dfrac{1}{2} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad -\dfrac{3x_1}{y_1} \cdot \dfrac{1}{2} = -1 \quad \Leftrightarrow$

$2y_1 = 3x_1 \quad \Leftrightarrow \quad y_1 = \dfrac{3}{2}x_1$

$\Lambda(x_1, y_1) \in$ στην έλλειψη $\Leftrightarrow \quad 3x_1^2 + y_1^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 3x_1^2 + \dfrac{9}{4}x_1^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 12x_1^2 + 9x_1^2 \;\; 16 \quad \Leftrightarrow$

$21x_1^2 = 16 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \dfrac{4}{\sqrt{21}} \quad ή \quad x_1 = -\dfrac{4}{\sqrt{21}}$

- Για $x_1 = \dfrac{4}{\sqrt{21}}$ θα είναι $y_1 = \dfrac{3}{2}\,\dfrac{4}{\sqrt{21}} = \dfrac{6}{\sqrt{21}}$ Τότε

  $\varepsilon: \; 3\dfrac{4}{\sqrt{21}}x + \dfrac{6}{\sqrt{21}}y = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 12x + 6y = 4\sqrt{21} \quad \Leftrightarrow \quad 6x + 3y - 2\sqrt{21} = 0$

- Για $x_1 = -\dfrac{4}{\sqrt{21}}$ θα είναι $y_1 = \dfrac{3}{2}\,(-\dfrac{4}{\sqrt{21}}) = -\dfrac{6}{\sqrt{21}}$ Τότε

  $\varepsilon: \; 3(-\dfrac{4}{\sqrt{21}})x - \dfrac{6}{\sqrt{21}}y = 4 \quad \Leftrightarrow \quad -12x - 6y = 4\sqrt{21} \quad \Leftrightarrow \quad 6x + 3y + 2\sqrt{21} = 0$

(iii)Έστω $\varepsilon: \; 3x_1x + y_1y = 4$ ζητούμενη εφαπτομένη, όπου $\Lambda(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής.

$M(0, 4) \in \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad 3x_1.0 + y_1.4 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad y_1 = 1$

$\Lambda(x_1, y_1) \in$ στην έλλειψη $\Leftrightarrow \quad 3x_1^2 + y_1^2 = 4 \quad \Leftrightarrow$

$3x_1^2 + 1^2 = 4 \quad \Leftrightarrow$

$3x_1^2 = 3 \quad \Leftrightarrow$

$x_1^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 1 \quad ή \quad x_1 = -1$

Για $x_1 = 1$, $y_1 = 1$, είναι $\varepsilon: \; 3.\,1x + 1y = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 3x + y = 4$

Για $x_1 = -1$, $y_1 = 1$, είναι $\varepsilon: \; 3.\,(-1)x + 1y = 4 \quad \Leftrightarrow \quad -3x + y = 4$

ΘΕΜΑ 42[0] Γ-Δ

Δίνεται η παραβολή $y^2=4x$. Να βρείτε:

Α. Την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής.

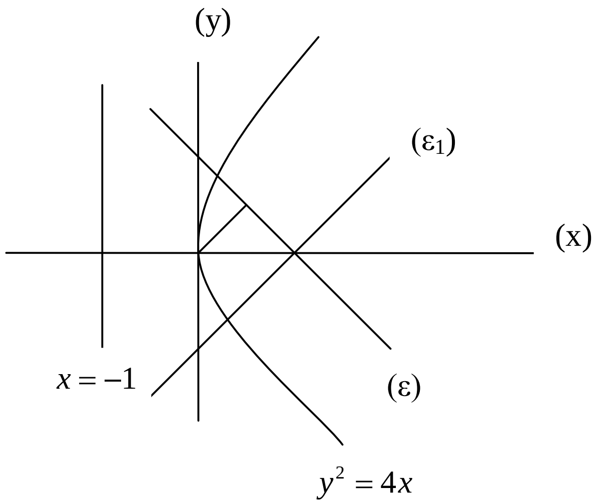
Β. Τις ευθείες που διέρχονται από την εστία της παραβολής και απέχουν από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Γ. Την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής που είναι παράλληλη στην ευθεία $y=x-1$.

ΛΥΣΗ

Α. Κατά τη θεωρία μας η παραβολή με εξίσωση $y^2=2\mathrm{P}x$ έχει εστία $E\left(\frac{\mathrm{P}}{2},0\right)$ και διευθετούσα $x=-\frac{\mathrm{P}}{2}$. Συνεπώς για την παραβολή $y^2=4x$ θα είναι $2\mathrm{P}=4$ ή $\mathrm{P}=2$. Άρα εστία $\mathrm{E}(1,0)$ και η διευθετούσα $x=-1$.

Β. Κάθε ευθεία που διέρχεται από την εστία $\mathrm{E}(1,0)$ έχει εξίσωση $y=\lambda(x-1)$



ή $x=1$. Για να είναι η ευθεία $y=\lambda(x-1)$ λύση του προβλήματος πρέπει η απόσταση h του σημείου $0(0,0)$ από αυτήν να είναι ίση προς $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Η ευθεία μας γράφεται $\lambda x-y-\lambda=0$.

Θυμόμαστε ότι η απόσταση σημείου $\mathrm{M}(x_0,y_0)$ από την ευθεία $\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma=0$ είναι $h=\frac{|\mathrm{A}x_0+\mathrm{B}y_0+\Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

Εφαρμόζοντας τον τύπο αυτό για τα δεδομένα της άσκησής μας έχουμε

$$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{|\lambda\cdot 0-0-\lambda|}{\sqrt{\lambda^2+1}}\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{|\lambda|}{\sqrt{\lambda^2+1}}\Rightarrow\sqrt{2}\sqrt{\lambda^2+1}=2|\lambda|\Rightarrow$$

$$2(\lambda^2+1)=4\lambda^2\Rightarrow 2\lambda^2+2=4\lambda^2\Rightarrow 2\lambda^2=2\Rightarrow\lambda^2=1\Rightarrow\lambda=\pm1.$$

Συνεπώς οι εξισώσεις των ευθειών αυτών είναι $y=x-1$ και $y=-x+1$.

Γ. Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $y^2=2\mathrm{P}x$ στο σημείο (x_1,y_1) είναι κατά τη θεωρία $yy_1=\mathrm{P}(x+x_1)$. Συνεπώς για την παραβολή $y^2=4x$ η εφαπτομένη στο (x_1,y_1) είναι $yy_1=2(x+x_1)$. Πρέπει τώρα να υπολογίσουμε τα x_1,y_1. Το σημείο (x_1,y_1.) ανήκει στην παραβολή και άρα $y_1^2=4x_1$. Επιπλέον η εφαπτομένη $yy_1=2(x+x_1)$. είναι παράλληλη προς την $y=x-1$. Για να συμβαίνει αυτό πρέπει οι συντελεστές διεύθυνσης των δύο ευθειών να είναι ίσοι δηλαδή $\frac{2}{y_1}=1$ και άρα $y_1=2$. Αντικαθιστώντας τώρα στην $yy_1=2(x+x_1)$ τα x_1 και y_1 έχουμε. $y\cdot 2=2(x+1)$ ή $y=x+1$ που είναι η ζητούμενη εξίσωση της εφαπτομένης που είναι παράλληλη στην $y=x-1$.

Γ. Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $y^2=2\mathrm{P}x$ στο σημείο (x_1,y_1) είναι κατά τη θεωρία $yy_1=\mathrm{P}(x+x_1)$. Συνεπώς για την παραβολή $y^2=4x$ η εφαπτομένη στο (x_1,y_1) είναι $yy_1=2(x+x_1)$.

Πρέπει τώρα να υπολογίσουμε τα x_1,y_1. Το σημείο (x_1,y_1.) ανήκει στην παραβολή και άρα $y_1^2=4x_1$.

Επιπλέον η εφαπτομένη $yy_1 = 2(x + x_1)$. είναι παράλληλη προς την $y = x - 1$. Για να συμβαίνει αυτό πρέπει οι συντελεστές διεύθυνσης των δύο ευθειών να είναι ίσοι δηλαδή $\frac{2}{y_1} = 1$ και άρα $y_1 = 2$. Αντικαθιστώντας τώρα στην $yy_1 = 2(x + x_1)$ τα x_1 και y_1 έχουμε. $y \cdot 2 = 2(x+1)$ ή $y = x + 1$ που είναι η ζητούμενη εξίσωση της εφαπτομένης που είναι παράλληλη στην $y = x - 1$.

ΘΕΜΑ 43^0 Δ

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x\sigma\upsilon\nu\vartheta - 2y\eta\mu\vartheta - 1 = 0 \qquad 0 \le \vartheta < 2\pi$.

Α. Να αποδείξετε ότι για κάθε ϑ η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα.

Β. Αν $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο $M(1,2)$.

Γ. Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του ϑ τα κέντρα των παραπάνω κύκλων βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο το (0,0) και ακτίνα $\rho = 1$.

ΛΥΣΗ

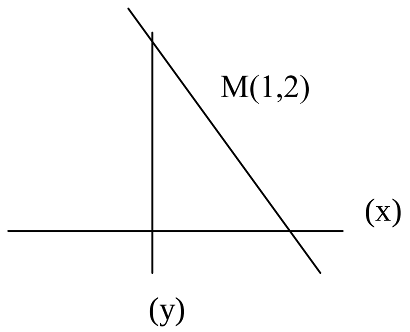
Κατά τη θεωρία κάθε εξίσωση της μορφής $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ για να παριστάνει κύκλο πρέπει να ισχύει η συνθήκη $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$. Επειδή η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x\sigma\upsilon\nu\vartheta - 2y\eta\mu\vartheta - 1 = 0$ έχει την παραπάνω μορφή και επειδή το $\Gamma = -1$ είναι αρνητικός αριθμός, η συνθήκη $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$ ισχύει.. Το κέντρο του κύκλου κατά τη θεωρία είναι $\mathrm{K}\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ και συνεπώς για την άσκησή μας είναι $\mathrm{K}\left(\frac{2\sigma\upsilon\nu\vartheta}{2}, \frac{2\eta\mu\vartheta}{2}\right)$ ή $\mathrm{K}(\sigma\upsilon\nu\vartheta, \eta\mu\vartheta)$. Η ακτίνα του κύκλου κατά τη θεωρία είναι $R = \frac{\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 - 4\Gamma}}{2}$ και συνεπώς για την άσκησή μας είναι $R = \frac{\sqrt{(-2\sigma\upsilon\nu x)^2 + (-2\eta\mu x)^2 - 4(-1)}}{2}$ ή $R = \frac{\sqrt{4\sigma\upsilon\nu^2 x + 4\eta\mu^2 x + 4}}{2}$ ή $R = \frac{\sqrt{4(\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x) + 4}}{2}$ ή $R = \frac{\sqrt{4+4}}{2} = \frac{\sqrt{8}}{2} = \sqrt{2}$.

Β. Αν $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ τότε είναι $\mathrm{K}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}, \eta\mu\frac{\pi}{2}\right)$ ή $\mathrm{K}(0,1)$. Η εφαπτομένη του κύκλου είναι η κάθετος επί της ΚΜ στο Μ.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ΚΜ είναι $\lambda = \frac{2-1}{1-0} = 1$.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της (ε) που είναι κάθετος στην ΚΜ είναι $\lambda' = -1$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης που είναι ευθεία που διέρχεται από το $M(1,2)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda' = -1$ είναι $y - 2 = -1(x-1)$ ή $y = -x + 1$.



Γ. Ο κύκλος με κέντρο (0,0) και ακτίνα $\rho = 1$ έχει εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$ (1)

Το κέντρο του κύκλου της άσκησης μας για τυχαίο ϑ είναι $\mathrm{K}(\sigma\upsilon\nu\vartheta, \eta\mu\vartheta)$. Αν λοιπόν θέσουμε στην (1) όπου x το $\sigma\upsilon\nu\vartheta$ και όπου y το $\eta\mu\vartheta$ έχουμε : $\sigma\upsilon\nu^2\vartheta + \eta\mu^2\vartheta = 1$ που είναι αληθής. Συνεπώς το Κ ανήκει στον κύκλο με κέντρο το (0,0) και ακτίνα $\rho = 1$.

3 ΘΕΜΑΤΑ ΑΠΟ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΓΙΑ 1^0 ΘΕΜΑ……… ΑΠΟ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^0

Α. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή ή λάθος κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις:

α. Ισχύει: $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$ αν και μόνο αν $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$.

β. Η έλλειψη $2x^2 + 3y^2 = 6$ έχει τις εστίες της πάνω στον άξονα y΄y.

γ. Στην ισοσκελή υπερβολή η εκκεντρότητα ισούται με $\sqrt{2}$.

δ. Η εξίσωση $x^2 + 2y^2 = 3$ παριστάνει έλλειψη.

ε. Αν η εφαπτομένη μιας υπερβολής στο σημείο της $M(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση $\dfrac{xx_1}{4} - yy_1 = 1$

τότε οι εστίες της είναι οι $E'\left(-\sqrt{5}, 0\right)$ και $E\left(\sqrt{5}, 0\right)$ Μονάδες 10

Β. Να δώσετε τον ορισμό της παραβολής. Μονάδες 5

Γ. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = p^2$, στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση $xx_1 + yy_1 = p^2$ Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 2^0

Α. Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$, $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$, $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \neq yy'$ να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$.

Μονάδες 15

Β. Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ)

α. Για τρία μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ισχύει πάντα:

$\vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma}$

β. Η ευθεία που ορίζουν τα σημεία $A(1,3)$ και $B(1,5)$ μπορεί να γραφεί στη μορφή

$y = \alpha x + \beta$ για κατάλληλους συντελεστές $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

γ. ο κύκλος c: $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ εφάπτεται και στους δύο άξονες.

δ. Η εφαπτομένη οποιουδήποτε κύκλου με ακτίνα $\rho > 0$ στο σημείο του κύκλου $M(\alpha, \beta)$

θα έχει εξίσωση $\alpha x + \beta y = \rho^2$

ε. Υπάρχουν τιμές του πραγματικού αριθμού κ για τις οποίες η εξίσωση:

$\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{\kappa} = 1$ παριστάνει έλλειψη. Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3^0

Α. Έστω δύο σημεία $Α(x_1, y_1)$ και $Β(x_2, y_2)$ του καρτεσιανού επιπέδου.
Αν (x, y) είναι οι συντεταγμένες του μέσου Μ του ΑΒ, να αποδείξετε ότι :

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ και } y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Μονάδες 10

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:

α. Αν $\vec{\alpha} = (x, y)$, τότε $|\vec{\alpha}| = \sqrt{x^2 - y^2}$

β. Οι ασύμπτωτες της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ είναι οι ευθείες:

$$y = \frac{\beta}{\alpha}x,\ y = -\frac{\beta}{\alpha}x$$

γ. Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\eta} = (B, A)$.

δ. Η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει κύκλο αν $A^2 + B^2 + 4\Gamma > 0$

ε. Η εφαπτομένη της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ στο σημείο της $M(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση:

$$\beta^2 x_1 x + \alpha^2 y_1 y = \alpha^2\beta^2$$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ 4^0

Α. Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ είναι δύο μη μηδενικά διανύσματα του επιπέδου που σχηματίζουν γωνία θ, να αποδείξετε ότι:

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

Μονάδες 8

Β. Δίνεται ο κύκλος C: $x^2 + y^2 = \rho^2$ και ένα σημείο του $Α(x_1, y_1)$. Να αποδειχτεί ότι η εξίσωση της εφαπτομένης του Α είναι:
$x x_1 + y y_1 = \rho^2$

Μονάδες 9

Γ. Να χαρακτηρίσετε ως Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις:

α. Αν $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$

β. Αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -1$

γ. Αν $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ τότε $\lambda_1 = -\lambda_2$

δ. Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 5^0

Α. Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων $O(0, 0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση: $x^2 + y^2 = \rho^2$

Μονάδες 10

Β. Να γράψετε (χωρίς απόδειξη), την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $Α(x_1, y_1)$.

Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστό (Σ)_ή Λάθος (Λ)

α. Αν $\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ είναι η ορίζουσα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 1$.

β. Ισχύει ο τύπος: $\vec{\alpha} \cdot \vec{v} = \vec{\alpha} \cdot \pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}} \vec{v}$.

γ. Η απόσταση του σημείου $M_0(x_0, y_0)$ από την ευθεία ε: $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι:
$d(M_0, \varepsilon) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

δ. Η εφαπτομένη της έλλειψης με εστίες στον άξονα x΄x, στο σημείο της $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση: $\dfrac{xx_1}{\alpha^2} - \dfrac{yy_1}{\beta^2} = 1$.

ε. Η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει ευθεία, αν και μόνο αν: $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$.

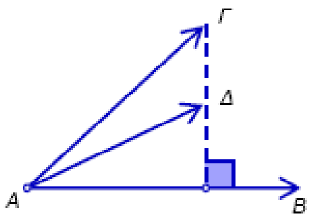
ΘΕΜΑ 6^0

Α. Έστω $\vec{\alpha}$, $\vec{v}$ δύο διανύσματα του επιπέδου με $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$. Να αποδειχτεί ότι:

$\vec{\alpha} \cdot \vec{v} = \vec{\alpha} \cdot \pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}} \vec{v}$ Μονάδες 10

Β. Για τα διανύσματα του παρακάτω σχήματος να αποδειχτεί ότι :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$



Μονάδες 5

Γ. Δώστε τον ορισμό και τον τύπο της έλλειψης με εστίες Ε΄, Ε που βρίσκονται στον άξονα x΄x. Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 7^0

Α. Αν Ε και Ε΄ δύο σημεία του επιπέδου, τι ονομάζουμε έλλειψη με εστίες τα σημεία αυτά; Μονάδες 5

Β. Αν ε η εκκεντρότητα της έλλειψης $\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$, να αποδείξετε ότι $\dfrac{\beta}{\alpha} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$

Μονάδες 10

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη ***"Σωστό"***, αν η πρόταση είναι σωστή ή ***"Λάθος"***, αν η πρόταση είναι λανθασμένη:

α. Αν το Μ είναι μέσο του τμήματος ΑΒ και το Ο σημείο αναφοράς, $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}}{2}$

β. Αν $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = 0^\circ$ τότε $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$

γ. Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$

δ. Η παραβολή $x^2 = 2py$ έχει εστία $E\left(\dfrac{p}{2}, 0\right)$

ε. Όταν η εκκεντρότητα μιας έλλειψης τείνει στο μηδέν τότε η έλλειψη τείνει να γίνει κύκλος. Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 1^0

Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει $|\vec{\alpha}|=1$, $|\vec{\beta}|=2$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{3}$.

Α. Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ Μονάδες 7

Β. Να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό λ, έτσι ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}-\lambda\cdot\vec{\beta}$ να είναι κάθετα μεταξύ τους. Μονάδες 9

Γ. Να υπολογίσετε το μέτρο του $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 2^0

Έστω $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δύο μη μηδενικά διανύσματα. Δίνονται επίσης τα διανύσματα $\vec{v}=2\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ και $\vec{u}=2\vec{\alpha}+\vec{\beta}$. Αν είναι $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$ και $\vec{u}\perp\vec{v}$, τότε:

Α. Να αποδείξετε ότι: $(\vec{v}+\vec{u})\uparrow\uparrow\vec{\alpha}$ και $(\vec{v}-\vec{u})\uparrow\downarrow\vec{\beta}$. Μονάδες 4

Β. Να αποδείξετε ότι: $|\vec{\alpha}|=\frac{1}{2}|\vec{\beta}|$ Μονάδες 6

Γ. Να αποδείξετε ότι: $|\vec{v}|=|\vec{u}|=\sqrt{2}|\vec{\beta}|$ Μονάδες 8

Δ. Να υπολογίσετε τη γωνία φ των διανυσμάτων $\vec{\beta}$ και $\vec{v}$. Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3^0

Δίνονται τα σημεία Α(5,1) Β(−1,−2) Γ(−3,2). Να βρεθούν:

Α. το $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}$

Β. οι συντεταγμένες του σημείου Δ αν το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο

Γ. το $|\overrightarrow{A\Gamma}|$

Δ. το εμβαδόν του ΑΒΓΔ Μονάδες 7 + 7 + 4 + 7

ΘΕΜΑ 4^0

Δίνονται τα σημεία Α(2,1), Β(−3,2) και Γ(1,−3). Να βρεθούν:

Α. Η απόσταση του Γ από την ΑΒ. Μονάδες 8

Β. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. Μονάδες 9

Γ. Την εξίσωση της διαμέσου από την κορυφή Α. Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 5^0

Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ του επιπέδου ισχύουν: $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=2|\vec{\alpha}|$ και η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}$ είναι 60^o να δειχθεί ότι:

Α. $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$ Μονάδες 12

Β. $|\vec{\beta}|=\sqrt{3}|\vec{\alpha}|$ Μονάδες 13

ΘΕΜΑ 6^0

Δίνονται τα σημεία $A(0,6)$, $B(-4, 9)$ και $\Gamma(1,-1)$.

Α. Να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ε) που διέρχεται από τα σημεία Α και Β. Μονάδες 5

Β. Να δείξετε ότι η ευθεία (ε) που περνά από τα σημεία Α και Β έχει εξίσωση την ε: $3x + 4y - 24 = 0$ Μονάδες 8

Γ. Να βρείτε την απόσταση του σημείου Γ από την ευθεία (ε). Μονάδες 6

Δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 7^0

Δίνεται ο κύκλος $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 5$ και το σημείο του $A(2,-1)$.

Α. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο Α. Μονάδες 12

Β. Να βρεθεί ευθεία παράλληλη στην προηγούμενη εφαπτομένη που περνάει από το κέντρο του κύκλου Μονάδες 13

ΘΕΜΑ 8^0

Δίνονται τα σημεία $A(3,1)$, $B(-1,-1)$ και οι ευθείες:

ε_1: $x - 3y + \lambda + 4 = 0$

ε_2: $2x + y - 5\lambda + 1 = 0$ με $\lambda \in \mathbb{R}$.

Α. Να δειχθεί ότι οι ευθείες ε_1, ε_2 τέμνονται σε σημείο Μ το οποίο και να βρεθεί. Μονάδες 7

Β. Να βρεθεί η εξίσωση της γραμμής που κινείται το Μ για τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$. Μονάδες 8

Γ. Να δείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΜ είναι σταθερό (ανεξάρτητο του λ) Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 9^0

Αν $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 3$ και $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = \frac{\pi}{3}$, να υπολογίσετε:

Α. το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

Β. το $\kappa \in \Re$, ώστε τα διανύσματα $\vec{u} = 3\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\vec{v} = \kappa\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ να είναι παράλληλα.

Γ. το μέτρο: $|3\vec{\alpha} - \vec{\beta}|$

ΘΕΜΑ 10^0

Δίνονται τα σημεία $A_1(-1, 2)$ και $A_2(2, -1)$ ενός ορθοκανονικού συστήματος αξόνων

Α. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας ε_1 που διέρχεται από τα σημεία αυτά.

Β. Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζει η παραπάνω ευθεία με τον άξονα $x'x$

Γ. Δίνεται επί πλέον η ευθεία ε_2: $(2-\kappa)x + \kappa y + 1 = 0$

i. Να βρεθεί η τιμή του **κ** ώστε $\varepsilon_2 // \varepsilon_1$

ii. Για την τιμή του **κ** που βρήκατε να βρεθεί η απόσταση των παραλλήλων ε_1 και ε_2

ΘΕΜΑ 1^0

Δίνονται τα σημεία $A(2\lambda-1, 3\lambda+2)$, $B(1,2)$ και $\Gamma(2,3)$ όπου $\lambda\in\Re$ και $\lambda\neq 0$

Α. Να αποδείξετε ότι το Α κινείται σε ευθεία καθώς το λ μεταβάλλεται στο $\Re$, της οποίας να βρείτε την εξίσωση. Μονάδες 10

Β₁. Να δείξετε ότι το σημείο Α που απέχει από την ευθεία ΒΓ απόσταση ίση με 2 είναι το $A(-9, -10)$ Μονάδες 5

Β₂. Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ Μονάδες 5

Β₃. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το $A(-9, -10)$ και εφάπτεται στην ευθεία ΒΓ Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2^0

Δίνεται η εξίσωση: $\kappa^2(x - y +1) + \kappa(2x + y + 5) + x + 2y + 8 = 0$

Α. Να εξεταστεί αν παριστάνει ευθεία για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$. Μονάδες 10

Β. Να βρεθεί αν για τις τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$ που παριστάνει ευθεία, οι ευθείες περνούν από το ίδιο σημείο. Μονάδες 7

Γ. Να βρεθεί ποια από τις παραπάνω γραμμές σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3^0

Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με $A(1, 3)$, $B(-2, -7)$ και $\Gamma(4, -1)$.

Α. Να βρείτε την εξίσωση του ύψους ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ. Μονάδες 6

Β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. Μονάδες 6

Γ. Να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ. Μονάδες 6

Δ. Να υπολογίσετε την οξεία γωνία των ευθειών ΑΜ και ΑΔ. Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4^0

Δίνεται η εξίσωση $x - y +1+ \lambda(x + 2y - 1)$ (1) με $\lambda \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

Α. Η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ Μονάδες 10

Β. Όλες οι ευθείες της εξίσωσης (1) διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο να προσδιορίσετε. Μονάδες 8

Γ. Να δείξετε ότι για $\lambda = 0$ η ευθεία που προκύπτει από την (1) εφάπτεται του κύκλου: $x^2 + (y + 1)^2 = 2$ Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 5^0

Έστω η εξίσωση $x^2 - y^2 + 6\lambda x + 2\lambda y + 8\lambda^2 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Δείξτε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει δύο ευθείες ε_1, ε_2 που είναι κάθετες μεταξύ τους. Μονάδες 10

β. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής Μ των ε_1, ε_2 σαν συνάρτηση του λ Μονάδες 8

γ. Να βρείτε την εξίσωση της γραμμής πάνω στην οποία κινείται το σημείο Μ Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 6^0

Δίνονται τα διανύσματα: $\vec{\alpha} = (1,1)$, $\vec{\beta} = (0,2)$ και $\vec{\gamma} = (-1,1)$

Α. Να δείξετε ότι η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι $45°$ Μονάδες 8

Β. Να βρείτε την προβολή του διανύσματος $\vec{\beta}$ πάνω στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$ Μονάδες 9

Γ. Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 7^0

Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ που σχηματίζουν γωνία $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{\pi}{3}$

και η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2|\vec{\alpha}| \cdot x - |\vec{\beta}| \cdot y + \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$

Α. Να αποδειχτεί ότι:

α. $\vec{\beta} \neq 2\vec{\alpha}$ Μονάδες 5

β. η εξίσωση παριστάνει κύκλο του οποίου να βρεθεί το κέντρο Κ και η ακτίνα ρ Μονάδες 5

Β. Αν $K(1,1)$ το κέντρο του κύκλου να αποδειχτεί ότι:

α. $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$, $\rho = 1$ Μονάδες 5

β. ο κύκλος εφάπτεται στην ευθεία ε: $3x + 4y - 12 = 0$ Μονάδες 5

γ. η προβολή του $\vec{\beta}$ στο $\vec{\alpha}$ είναι το $\vec{\alpha}$ Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 8^0

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + y^2 - 4x + 4y + 3 = 0$ (1)

α. Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο του οποίου να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα του Μονάδες 12

β. Να δείξετε ότι το σημείο $M(1, -3)$ είναι εσωτερικό του κύκλου και να βρεθεί η εξίσωση της χορδής του η οποία να έχει μέσο το σημείο $M(1, -3)$ Μονάδες 13

ΘΕΜΑ 9^0

Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$. Να βρείτε:

α. Την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής. Μονάδες 5

β. Τις ευθείες που διέρχονται από την εστία της παραβολής και απέχουν από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Μονάδες 10

γ. Την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής που είναι κάθετη στην ευθεία $y = x - 1$. Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 10^0

α. Δείξτε ότι η εξίσωση $x^2 - 4x + y^2 - 2y + 1 = 0$ παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα. Μονάδες 10

β. Η ευθεία $y = \frac{1}{2}x$ πόσα κοινά σημεία έχει, αν έχει, με τον παραπάνω κύκλο.

γ. Τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου που είναι παράλληλες στην ευθεία $y = \frac{1}{2}x$.

Μονάδες 5 +10

ΘΕΜΑ 11^0

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (y-1,\ 1)$ και $\vec{\beta} = (y+1,\ 1-4x)$.

Α. Αν τα διανύσματα είναι κάθετα , να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x,\ y)$ είναι η παραβολή $C_1 : y^2 = 4x$, της οποίας να βρείτε την εστία και τη διευθετούσα . Μονάδες 6

Β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της παραβολής στο σημείο της $A(1\ ,\ 2)$. Μονάδες 4

Γ. Αν $\left|5\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right| = 3\sqrt{2}$, δείξτε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $N(x\ ,\ y)$ είναι ο κύκλος $C_2 :\ (x+1)^2 + \left(y-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{8}$, του οποίου να βρείτε το κέντρο , την ακτίνα και την εφαπτομένη ευθεία που άγεται από το σημείο $A(-1,0)$ Μονάδες 10

Δ. Να δείξετε ότι η ευθεία (ε) είναι κοινή εφαπτομένη των C_1 και C_2. Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 12^0

Δίνεται η ευθεία (ε) με εξίσωση: $x\ -2y = 4$

Α. Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας (ε) και τα σημεία Α, Β στα οποία τέμνει τους άξονες $x'x$ και yy' αντιστοίχως. Μονάδες 6

Β. Να βρείτε το μέσο Μ του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. Μονάδες 4

Γ. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (η) που είναι μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ και την απόσταση του σημείου $O(0,0)$ από αυτήν. Μονάδες 15

ΘΕΜΑ 13^0

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2$ και $|\vec{\beta}| = 3$.

Δίνεται επίσης: $|2\vec{\alpha}\ -\ \vec{\beta}| = 7$. Να δείξετε ότι:

Α. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = -6$ Μονάδες 5

Β. $\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\ \vec{\beta}}\right) = -1$ Μονάδες 4

Γ. $\vec{\alpha} = -\frac{2}{3}\vec{\beta}$ Μονάδες 8

Δ. $\left|\frac{1}{2}\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right| = 4$ Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 14^0

Αν $\vec{\alpha} = (-4x+1,\ y+1)$ και $\vec{\beta} = (1,\ y\ -1)$ κάθετα διανύσματα.

Α. Να αποδείξετε ότι το σημείο $M(x,\ y)$ ανήκει σε παραβολή της οποίας να βρείτε την εστία και τη διευθετούσα. Μονάδες 8

Β. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από την εστία Ε της παραβολής και απέχουν από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με $\frac{1}{2}$. Μονάδες 9

Γ. Να υπολογίσετε την οξεία γωνία των παραπάνω ευθειών. Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 1^0

Δίνεται το σημείο $A(-2,0)$ και ο κύκλος $x^2+y^2=1$.

Α. Να αποδειχτεί ότι οι εφαπτόμενες του κύκλου που διέρχονται από το $A(-2,0)$ είναι:

(ε_1): $\sqrt{3}x-3y+2\sqrt{3}=0$ και

(ε_2): $\sqrt{3}x+3y+2\sqrt{3}=0$. Μονάδες 6

Β. Να βρεθεί η γωνία των εφαπτομένων αυτών. Μονάδες 7

Γ. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες αυτές είναι κοινές εφαπτόμενες του εν λόγω κύκλου και του κύκλου: $(x-3)^2+y^2=\dfrac{25}{4}$ Μονάδες 6

Δ. Να εξεταστεί αν υπάρχει και άλλη κοινή εφαπτόμενη. Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 2^0

Σε ένα σύστημα συντεταγμένων Oxy στο επίπεδο, δίνονται το σημείο $E(\alpha, 0)$, το διάνυσμα $\overrightarrow{EA}=\left(\dfrac{\beta^2-4\alpha^2}{4\alpha},\beta\right)$ και η καμπύλη με εξίσωση $x^2+y^2-12\alpha x+16\alpha^2=0$ (1), όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $\alpha \neq 0$. Να αποδείξετε ότι:

Α. Το πέρας Α του διανύσματος $\overrightarrow{EA}$ ανήκει σε παραβολή με εστία το σημείο Ε. Μονάδες 9

Β. Η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\alpha \neq 0$, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα. Μονάδες 8

Γ. Τα κοινά σημεία της παραβολής του (Α) ερωτήματος και του κύκλου του (Β) ερωτήματος ανήκουν σε δύο ευθείες εξαιρουμένου του κοινού τους σημείου. Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3^0

Δίνεται η έλλειψη (c) με εξίσωση: $\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$, $\alpha>\beta$ και το σημείο $M(\alpha\cdot\eta\mu\theta,\ \beta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta)$, $\theta\in(0, 2\pi)$ με $\theta\neq\dfrac{\pi}{2}$, $\theta\neq\dfrac{3\pi}{2}$.

Α. Να εξετάσετε αν το σημείο ανήκει στην έλλειψη Μονάδες 4

Β. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της έλλειψης που διέρχεται από το σημείο Μ. Μονάδες 4

Γ. Να δείξετε ότι η κάθετη στην εφαπτομένη στο σημείο Μ έχει εξίσωση (ε): $(\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\theta)x-(\beta\cdot\eta\mu\theta)y=(\alpha^2-\beta^2)\cdot\eta\mu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta$ Μονάδες 9

Δ. Αν η (ε) διέρχεται από το σημείο $(\beta, 0)$ να δείξετε ότι ισχύει η σχέση: $\eta\mu\theta=\dfrac{\beta}{\alpha\cdot\varepsilon^2}$, όπου ε η εκκεντρότητα της έλλειψης. Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4^0

Έστω ο κύκλος C_1: $x^2 + y^2 - 2x - 4 = 0$ και η παραβολή C_2: $y^2 = 2px$

Α. Αν το κέντρο του κύκλου C_1 είναι εστία της παραβολής C_2 να βρεθεί το p.

Μονάδες 5

Β. Για την τιμή του p που βρήκατε στο ερώτημα 1 να βρεθούν οι εφαπτόμενες της παραβολής C_2 που διέρχονται από το σημείο Α(0,2) Μονάδες 12

Γ. Ποια από τις εφαπτόμενες της C_2 του ερωτήματος 2 εφάπτεται και στον κύκλο C_1

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 5^0

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + y^2 - 6x + 4y + \kappa = 0$ με $\kappa \in \mathbb{R}$. (1)

Α. Να βρεθούν οι τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε η παραπάνω εξίσωση να παριστάνει κύκλο C.

Μονάδες 6

Β. Να δειχθεί ότι αν η ακτίνα του κύκλου C είναι ρ =1, τότε κ =12. Μονάδες 7

Γ. Να δειχθεί ότι το σημείο Μ(4,2) είναι εξωτερικό του κύκλου C που προκύπτει από (1) για κ = 12. Στη συνέχεια να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων στον κύκλο αυτόν, που διέρχονται από το Μ. Μονάδες 12

ΘΕΜΑ 6^0

Δίνονται τα ομόρροπα διανύσματα $\vec{v}$, $\vec{u}$ και το διάνυσμα $\vec{w} = 2\vec{v} - \vec{u}$ για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις: $|\vec{u}| = 5 + |\vec{v}|$ και $\vec{u} \cdot \vec{v} = 6$

Α. Να δείξετε ότι: $|\vec{v}| = 1$, $|\vec{u}| = 6$ και $|\vec{w}| = 4$. Μονάδες 12

Β. Θεωρούμε το καρτεσιανό επίπεδο συντεταγμένων ΧΟΨ.

α. Να βρεθούν οι εστίες Ε, Ε΄ και η εκκεντρότητα της έλλειψης c:

$$\frac{x^2}{\vec{w}^2} + \frac{y^2}{\vec{v}^2} = 1$$

Μονάδες 6

β. Θεωρούμε την ευθεία ε: $x = |\vec{v}|$ και το σημείο $K\left(\frac{|\vec{w}| - |\vec{u}|}{2}, 0\right)$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει:
d(M, ε) = (MK) Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 7^0

Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 4x$ και η εξίσωση
$(C_1) : x^2 + y^2 - 6\kappa x + 2(\kappa - 1)y + 2\kappa - 1 = 0$, $\kappa \in \Re$

Α. Να βρείτε την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής. Μονάδες 4

Β. Να δείξετε ότι η εξίσωση (C_1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\kappa \in \Re$, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του. Μονάδες 6

Γ. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων των παραπάνω κύκλων. Μονάδες 5

Δ. Να αποδείξετε ότι ο κύκλος που προκύπτει από την εξίσωση (C_1) για κ =1 και η παραβολή εφάπτονται. Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 8^0

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - y^2 + 8x + 16 = 0$

Α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση αυτή παριστάνει δύο ευθείες, οι οποίες είναι κάθετες μεταξύ τους. Μονάδες 6

Β. Δίνονται οι ευθείες (η): $x - y + 4 = 0$ και (θ): $x + y + 4 = 0$. Να βρείτε σημείο Α(α, β), $\alpha > 0$ και $\beta > 0$ τέτοιο ώστε το διάνυσμα $\vec{\delta_1} = (4, \alpha)$ να είναι παράλληλο στην ευθεία (η) και το διάνυσμα $\vec{\delta_2} = (-8, 2\beta)$ να είναι παράλληλο στην ευθεία (θ). Μονάδες 5

Γ. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από το σημείο Α και έχει κέντρο το σημείο Κ(1, 0). Μονάδες 5

Δ. Αν $B(x_1, 0)$ με $x_1 > 0$ και $\Gamma(0, y_1)$ με $y_1 > 0$ σημεία του παραπάνω κύκλου να βρείτε τις εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία Β και Γ. Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 9^0

Δίνονται τα σημεία Α(1, y) και Β(2x, y) του καρτεσιανού επιπέδου Oxy.

Α. Αν ισχύει $\overline{OA} \perp \overline{OB}$, τότε να δείξετε ότι τα σημεία Μ(x, y) ανήκουν στην παραβολή c_1: $y^2 = -2x$, της οποίας να βρείτε την εστία Ε και τη διευθετούσα δ.

Β. Αν ισχύει $3|\overline{OA}|^2 + |\overline{OB}|^2 = 15$, τότε να δείξετε ότι τα σημεία Μ(x, y) ανήκουν στον κύκλο c_2: $x^2 + y^2 = 3$, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

Γ. Να δείξετε ότι τα κοινά σημεία της παραβολής c_1 και του κύκλου c_2 είναι τα $\Gamma\left(-1, \sqrt{2}\right)$ και $\Delta\left(-1, -\sqrt{2}\right)$.

Δ. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη ε_1 της παραβολής c_1 στο σημείο Γ είναι παράλληλη στην εφαπτομένη ε_2 του κύκλου c_2 στο σημείο Δ.

Ε. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου c_2 που είναι παράλληλη στην ε_2.

ΘΕΜΑ 10^0

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = (-6, 8)$ και $\vec{v} = (9, -12)$

Α. Να δείξετε ότι είναι αντίρροπα. Μονάδες 5

Β. Να δείξετε ότι η εξίσωση της έλλειψης που έχει άξονες τα διπλάσια των μέτρων των διανυσμάτων $\vec{u}$, $\vec{v}$ και μεγάλο άξονα στον y΄y είναι:

$\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{225} = 1$. Μονάδες 7

Γ. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη (δ) της έλλειψης στο σημείο $A\left(5, \dfrac{15\sqrt{3}}{2}\right)$ είναι η ευθεία:

$3x + 2\sqrt{3}y - 60 = 0$. Μονάδες 7

Δ. Να δείξετε ότι η (δ) σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον x΄x. Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 11^0

Δίνονται οι ευθείες ε_1: $\lambda x + y = \lambda$ και ε_2: $x - \lambda y = 3$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Α. Δείξτε ότι η κάθε ευθεία διέρχεται από ένα σταθερό σημείο τα οποία να βρείτε.

Μονάδες 8

Β. Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων τομής Μ(x, y) είναι κύκλος.

Μονάδες 8

Γ. Δίνεται το σημείο Δ(3, 5). Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου που διέρχονται από το Δ, καθώς και το μήκος των εφαπτομένων τμημάτων.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 12^0

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + y^2 - 2\lambda^2 x + 2\lambda y + \lambda^3 = 0$ (C_1).

Α. Βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \Re$ για τις οποίες η εξίσωση (C_1) παριστάνει κύκλο.

Β. Να δείξετε ότι τα κέντρα των παραπάνω κύκλων βρίσκονται στην παραβολή $(C_2) : y^2 = x$.

Γ. Αν η ευθεία $x - 2y + 1 = 0$ εφάπτεται της παραβολής (C_2) στο σημείο $K(x_0, y_0)$, να βρείτε το σημείο Κ, και την ακτίνα του κύκλου (C_1) που έχει κέντρο το σημείο $K(x_0, y_0)$.

ΘΕΜΑ 13^0

Δίνονται τα σημεία Α(–1, 2), Β(–3, 1), Γ(3, –2) και Δ(4, –1) ενός ορθοκανονικού συστήματος αξόνων.

Α. Να αναλύσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες από τις οποίες η μία να έχει τη διεύθυνση του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$.

Β. Να δείξετε ότι η γραμμή που γράφουν τα σημεία Μ(x, y) του επιπέδου για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{\Gamma M} = 0$, είναι κύκλος του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

Γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου του προηγούμενου ερωτήματος που είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{u} = \pi\rho o\beta_{\overrightarrow{AB}} \overrightarrow{\Gamma\Delta}$

ΘΕΜΑ 14^0

Δίνεται ο κύκλος C: $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 19 = 0$. Να βρείτε:

Α. το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου — Μονάδες 15

Β. την εξίσωση του κύκλου C_1, ο οποίος είναι ομόκεντρος με τον κύκλο C και εφάπτεται στην ευθεία (ε): $3x - 4y + 24 = 0$ — Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 15^0

Δίνεται η εξίσωση C: $x^2 + y^2 - 2x - 4\lambda x + 4\lambda = 0$ (1)

Α. Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο, του οποίου να προσδιοριστεί το κέντρο και η ακτίνα συναρτήσει του λ. — Μονάδες 7

Β. Ποιος ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων (C) Μονάδες 7

Γ. Να δείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την (1) διέρχονται από σταθερό σημείο Α.

Δ. Έστω Β, Γ τα σημεία τομής της ευθείας (ε): $y = 6x$ με τον κύκλο (c).
Να προσδιορίσετε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $\overline{AB} \perp \overline{A\Gamma}$. Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 16^0

Δίνεται η εξίσωση $C: x^2 + y^2 - 6kx - 8ky = 0$, $k \in R^*$

Α. Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο (για οποιαδήποτε τιμή του $k \in R^*$) του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα

Β. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων

Γ. Δείξτε ότι οι κύκλοι C διέρχονται από το σημείο Ο(0, 0) για κάθε $k \in R^*$

Δ. Έστω C_1 ο κύκλος για $k = 1$ και ευθεία (ε) με εξίσωση (ε): $y = \lambda x + 2$. Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$

ώστε η ευθεία (ε) να τέμνει τον κύκλο C_1 σε δύο σημεία Α και Β έτσι ώστε $\widehat{AOB} = 90°$

ΘΕΜΑ 17^0

Δίνεται η παραβολή $y^2 = 2px$, $p > 0$. Μια ευθεία ε εφάπτεται της παραβολής στο σημείο της $A(\frac{p}{2}, p)$ και του κύκλου $x^2 + y^2 = 2$.

α. Να αποδείξετε ότι $p = 4$ Μονάδες 9

β. Να αποδείξετε ότι οι κοινές εφαπτόμενες της παραβολής και του κύκλου είναι
ε: $y = x + 2$ και ε΄: $y = -x - 2$ Μονάδες 9

γ. Αν η ε τέμνει τον y΄y στο Β και τον x΄x στο Γ, να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{E\Gamma} = 2\overrightarrow{EB}$
όπου Ε η εστία της παραβολής Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 18^0

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4\lambda x - 4 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (ε)

α. Να δείξετε ότι η (ε) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα του

β. Να δείξετε ότι ο κύκλος διέρχεται από δύο σταθερά σημεία.

γ. Να βρεθεί το λ ώστε η ευθεία $y = x - 2$ να εφάπτεται στον παραπάνω κύκλο .

δ. Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης που έχει ως εστίες τα σημεία (0, –2) και (0,2) και μεγάλο άξονα μήκους 10 Μονάδες 6 + 6 + 7 + 6

ΘΕΜΑ 19^0

Α. Να βρείτε το κέντρο Κ και την ακτίνα ρ του κύκλου που έχει εξίσωση:
$x^2 + y^2 - 2\lambda^2 x - 4\lambda y + \lambda^4 + 3\lambda^2 - 1 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ Μονάδες 6

Β. Να αποδείξετε ότι η γραμμή (c) πάνω στην οποία βρίσκεται το κέντρο Κ όταν το λ μεταβάλλεται είναι παραβολή , της οποίας να βρείτε την εστία και τη διευθετούσα Μονάδες 8

Γ. Αν η εφαπτομένη της παραβολής (c) στο σημείο της $A(3, 2\sqrt{3})$ τέμνει τη διευθετούσα στο σημείο Β τότε:

α. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με διάμετρο το ΑΒ Μονάδες 7

β. Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με διάμετρο το ΑΒ εφάπτεται στον άξονα x΄x στην εστία της παραβολής Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 20⁰

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $\left(\widehat{\vec{\alpha}\,\vec{\beta}}\right) = \frac{\pi}{3}$ και $x^2 + y^2 - 2|\vec{\alpha}|x - |\vec{\beta}|y + \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0 \quad (1)$

Να δείξετε ότι :

α. $2\vec{\alpha} \neq \vec{\beta}$

β. Η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με ακτίνα $\rho = \frac{|2\vec{\alpha} - \vec{\beta}|}{2}$

γ. Αν το κέντρο του κύκλου είναι Κ(1 , 1) τότε $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$ και ρ=1

α. Ο κύκλος εφάπτεται στην ευθεία $3x + 4y - 12 = 0$

ε. Η προβολή του $\vec{\beta}$ στο $\vec{\alpha}$ είναι $\vec{\alpha}$ Μονάδες 5×5

ΘΕΜΑ 21⁰

Δίνονται τα σημεία $M(9-4\kappa,\ 3\kappa - \frac{3}{4})$ και $N(4\eta\mu\varphi,\ 4\sigma\upsilon\nu\varphi)$, $0 < \varphi < 2\pi$

α. Δείξτε ότι το Μ βρίσκεται σε ευθεία (ε): $3x + 4y = 24$ και το Ν βρίσκεται σε κύκλο (C) με κέντρο Ο (0, 0) και ακτίνα ρ = 4. Μονάδες 5

β. Αν Α, Β τα σημεία που τέμνει η (ε) τους άξονες x΄x, y΄y αντίστοιχα και Γ μέσο ΑΒ, να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων (ε_1), (ε_2) του κύκλου (C) από το σημείο Γ και το συνημίτονο της αμβλείας γωνίας που σχηματίζουν Μονάδες 12

γ. Αν $\overrightarrow{O\Gamma} = 2\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ όπου Ο(0, 0) δείξτε ότι το σημείο Δ έχει συντεταγμένες $\Delta\left(6, \frac{9}{2}\right)$ και να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου ΔΑΒ . Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 22⁰

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda + 1)x + (\lambda - 1)y - 3\lambda + 1 = 0$ (1), με $\lambda \in \mathbb{R}$

Α. Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για κάθε τιμή της παραμέτρου λ Μονάδες 5

Β. Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία η εξίσωση (1) είναι ευθεία παράλληλη στη διευθετούσα της παραβολής $y^2 = 4x$ και να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας Μονάδες 7

Γ.

α. Να δείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση (1) που διέρχεται από το σημείο Μ(2, 2) είναι η ε: y = 2 Μονάδες 5

β. Στη συνέχεια να βρείτε δύο ευθείες που διέρχονται από την αρχή Ο των αξόνων και τέμνουν την ευθεία ε στα σημεία Α, Β αντίστοιχα έτσι ώστε το σημείο Μ να είναι το μέσο του ΑΒ και το τρίγωνο ΟΑΒ να έχει εμβαδόν 10. Μονάδες 8